Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : Tutorat n°1

Nombres complexes et convergence des séries

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. Calculer les parties réelle et imaginaire de 5^{3i}, $\frac{1+i}{2-i}$, i^n $(n \in \mathbb{N})$.
2. Dessiner les régions suivantes du plan complexe :

   $$|z-i+5| = 3 \qquad |3z+i| \geq 1 \qquad \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z \qquad |z-1|-|z+1| = 2 \qquad |z-1|+|z+i| = 0$$

3. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que $|z+w| = |z| + |w|$.
4. On note $z = x + iy$; calculer, comme fonctions de x et y, les parties réelle et imaginaire de $\cos z$.
5. Prouver que pour $\theta \neq 0$ modulo 2π,

   $$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin(\theta/2)} \cos(n\theta/2)$$

   Montrer que la même relation reste vraie pour $\theta \to 0$.
6. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes :

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^a},\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} z^n$$

   $$\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^a} z^n,\ a > 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} z^n,\ c \in \mathbb{C} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 z^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$

7. Montrer que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^b a_n z^n$, $b \in \mathbb{R}$ ont le même rayon de convergence.
8. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ une série de rayon de convergence R, que peut-on dire du rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 z^n$?