Licence de Physique, FIP 2018-19

# Mathématiques pour physiciens : TD n$^{\rm o}$ 8

## Fonctionnelles linéaires, distributions, fonctions de Green

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

## 1 Exemples de distributions

Quelles sont, parmi les fonctionnelles suivantes, celles qui définissent une distribution sur l'ensemble des fonctions tests à support borné ?

$$T_1(\phi) = \int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$T_2(\phi) = \int_0^1 |\phi(x)|\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$T_3(\phi) = \sum_{n=0}^{N} \phi^{(n)}(0) \tag{3}$$

$$T_4(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0) \tag{4}$$

$$T_5(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(n) \tag{5}$$

$$T_6(\phi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n) \quad \text{(Peigne de Dirac, noté Ш).} \tag{6}$$

## 2 Dérivées des distributions

On rappelle qu'on définit la distribution $T'$, dérivée au sens des distributions (ou d-dérivée) de la distribution $T$, par la relation $T'(\phi) = -T(\phi')$ pour toute fonction test $\phi$. On utilisera aussi la notation $\langle T, \phi\rangle = T(\phi)$, et on rappelle qu'à toute fonction localement sommable $f$ on associe la distribution régulière $\langle f, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer les d-dérivées successives de la fonction de Heaviside $H(x)$.
2. Calculer les d-dérivées successives de la fonction $f\ :\ x \to |x|$.
3. Avec un léger abus de notation on écrit $\delta(x - x_0)$ la distribution $T$ telle que $\langle T, \phi\rangle = \phi(x_0)$, ainsi que $\delta'(x-x_0)$, $\delta''(x-x_0)$ ses d-dérivées successives. Simplifier les expressions suivantes :

$$a(x)\,\delta(x-1)\ , \qquad a(x)\,\delta'(x-1)\ , \qquad x^2\,\delta''(x-1)\ , \qquad \text{où}\ \ a(x) \in \mathcal{C}^1\ .$$

4. Calculer $g(x) = \frac{d^2}{dx^2}\exp(-2|x|)$.
5. Tracer $f(x) = \cos(x)[H(x) - H(x-\pi)]$ et calculer $df/dx$.

## 3 Changement de variables

On va définir des changements de variables dans les distributions. Considérer d'abord le cas d'une distribution s'identifiant à une fonction régulière $F$, et d'un changement de variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bijectif.

1. Montrer que l'on est amené à définir la distribution $F \circ f$ comme :
$$\langle F \circ f, \phi \rangle = \langle \frac{F}{|f' \circ f^{-1}|}, \phi \circ f^{-1} \rangle \,.$$
2. Que vaut alors la distribution $\delta \circ f$ si l'on étend cette définition aux distributions singulières ?
3. Motiver la généralisation au cas d'une fonction $f$ non nécessairement bijective — mais toujours dérivable, dont les zéros sont de dérivée non nulle :
$$\langle \delta \circ f, \phi \rangle = \ll \int_{-\infty}^{\infty} \delta\big(f(x)\big)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x \gg \; = \sum_{x \,|\, f(x)=0} \frac{1}{|f'(x)|}\, \phi(x).$$
4. Calculer $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \delta(x^2 - a^2) \; \phi(x)$ où $\phi$ est dans $\mathcal{D}$, avec $a > 0$.
5. Calculer l'intégrale $C = \int_{-7}^{4} \mathrm{d}x \, x^2 \, \delta(\sin(x))$.
6. Calculer l'intégrale
$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_2 \exp[-a^2(p_1^2 + p_2^2)]\, \delta(p_1^2 + p_2^2 - A^2)$$
pour $a, A \in \mathbb{R}$.
7. Calculer l'intégrale $I = \int_0^4 dx \; \cos(\pi x)\, \delta(x^2 + x - 2)$.

## 4 Valeur Principale de Cauchy

Pour une fonction test $\phi$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\phi(x)}{x}$ n'existe pas en général, à cause de la singularité non-intégrable en 0. On peut toutefois montrer que l'application

$$\phi \in \mathcal{D} \longmapsto \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

définit une distribution, appelée **valeur principale de Cauchy** ou **partie principale**, et notée

$$\langle \text{v.p.}\frac{1}{x}, \phi \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, \mathrm{d}x \,.$$

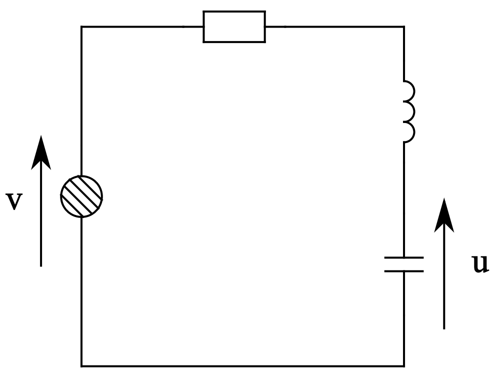
1. Considérer que $\phi(x)$ se comporte comme $x^p$ au voisinage de $x = 0$ ; quelle valeur de $p$ rend $\phi(x)/x$ non intégrable ? Pourquoi ce cas est-il régularisé par la définition de la valeur principale de Cauchy ?
2. Soit $\phi(x)$ une fonction continue sur $[-R, R]$ et telle que $\phi(x) = \phi(-x)$ et $\phi(0) = 1$. Prouver que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[ \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{R} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x \right] = 0 \,.$$
Ensuite, prouver que pour $\epsilon \to 0$
$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x + \int_{\epsilon^2}^{R} \frac{\phi(x)}{x} \mathrm{d}x \propto \log \epsilon \,.$$
Ce résultat montre l'importance de la symétrie de l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$ exclu dans la valeur principale de Cauchy.

3. Montrer que la valeur principale est la d-dérivée de $\ln|x|$, et que $x\left(\text{v.p.}\frac{1}{x}\right) = 1$.
4. Calculer les parties réelle et imaginaire de $\frac{1}{x-i\eta}$, où $x \in \mathbb{R}$ et $\eta > 0$, tracer leurs allures en fonction de $x$ pour plusieurs valeurs de $\eta$, et discuter leur limite, au sens des fonctions, quand $\eta \to 0^+$. Justifier finalement la limite au sens des distributions :

$$\lim_{\eta\to 0^+} \frac{1}{x - i\eta} = \text{v.p.}\frac{1}{x} + i\pi\delta \ .$$

# 5 Circuit RLC

On considère le circuit RLC présenté sur la figure ci-dessous.




1. Etablir l'équation d'évolution que satisfait la tension $u$ aux bornes du condensateur. On pourra noter $\tau = RC$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
2. Etablir la fonction de transfert $\chi(\omega) = \tilde{u}(\omega)/\tilde{v}(\omega)$ du filtre ainsi constitué, où $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont les amplitudes complexes de $u$ et $v$ à la pulsation $\omega$. On s'intéressera à la position des pôles de $\chi$ que l'on notera $\omega_\pm$.
3. Calculer la fonction de Green $\chi(t)$ du circuit, aussi appelée fonction de réponse impulsionnelle.
4. En utilisant la fonction de Green, calculer la réponse du circuit aux conditions initiales suivantes :
   a. Le circuit n'est initialement pas alimenté et le courant y est nul. À $t = 0$ on branche un générateur $v = Ve^{j\omega t}$ (comme toujours, à la fin des calculs, on prendra la partie réelle de $u$.)
   b. Le circuit est alimenté pour $t \leq 0$ par un générateur $v = V = \text{const}$ ; à l'instant $t = 0$, on remplace le générateur par un court-circuit.

# 6 Equation de diffusion

On considère des particules diffusant dans un espace à une dimension (l'axe réel $x$). On appelle $\rho(x,t)$ la densité de particules autour du point $x$ au temps $t$, de sorte que

$$N_V(t) = \int_V \mathrm{d}x\, \rho(x,t)$$

soit le nombre de particules dans un ensemble $V$ de l'axe réel au temps $t$. Dans la suite on note $\partial_x = \partial/\partial x$, etc.

1. L'équation de continuité s'écrit

$$\partial_t \rho(x,t) = -\partial_x J(x,t) \ .$$

Montrer que cette équation implique pour $V = [a,b]$ :

$$\frac{dN_{[a,b]}(t)}{dt} = J(a,t) - J(b,t) \ .$$

A partir de cette expression, interpréter $J(x,t)$ comme étant le courant au point $x$ et à l'instant $t$. Montrer que $J(x,t) = \rho(x,t)v(x,t)$ où $v(x,t)$ est la vitesse moyenne au point $x$ et à l'instant $t$.

2. Pour un profil de densité homogène (indépendant de $x$) le courant de particules est nul. Le courant $J$ doit donc dépendre des inhomogénéités (les gradients) du profil de densité $\rho$. Le choix le plus simple est :

$$J(x,t) = -D\partial_x \rho(x,t) \ .$$

Montrer qu'il est raisonnable de supposer $D > 0$. En déduire l'équation pour $\rho$ : $\partial_t \rho = D\partial_x^2 \rho$, qui est l'équation de la diffusion.

3. On suppose qu'à l'instant $t_0$, une particule est injectée dans le point $x_0$, de telle sorte que

$$N_{[x_0-a/2,x_0+a/2]}(t_0^+) = N_{[x_0-a/2,x_0+a/2]}(t_0^-) + 1 \ ,$$

pour tout $a > 0$. Montrer que le profil de densité satisfait l'équation

$$\partial_t \rho(x,t) = D\partial_x^2 \rho(x,t) + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \ . \tag{7}$$

4. On considère la transformée de Fourier $\rho(k,t) = \int \mathrm{d}x\, \rho(x,t) e^{ikx}$. Montrer qu'à partir de l'équation (7) on obtient

$$\partial_t \rho(k,t) = -Dk^2 \rho(k,t) + e^{ikx_0}\delta(t - t_0) \ .$$

Montrer que la solution telle que $\rho(k, t < t_0) = 0$ est $\rho(k,t) = H(t - t_0)e^{ikx_0 - Dk^2(t-t_0)}$.

5. En déduire que la solution de l'équation (7) telle que $\rho(x, t < 0) = 0$ est

$$\rho(x,t) = G(x,t|x_0,t_0) \ , \qquad G(x,t|x_0,t_0) = H(t - t_0)\frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4D(t-t_0)}}}{\sqrt{4\pi D(t - t_0)}} \ .$$

$G$ est donc la fonction de Green de l'équation de diffusion.

6. En déduire que la solution de l'équation de diffusion avec condition initiale $\rho(x,t_0) = \rho_0(x)$ à $t = t_0$ est, pour tout $t > t_0$ :

$$\rho(x,t) = \int \mathrm{d}x_0\, G(x,t|x_0,t_0)\, \rho_0(x_0) \ .$$