Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°6

Equations différentielles
Corrigé des exercices maison

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. Pour l'équation
$$y'' - \frac{2}{(1-z)^2} y = 0$$
le point $z=1$ est Fuchsien. Si l'on cherche une solution sous la forme
$$y(z) = (z-1)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$$
on trouve en insérant dans l'équation que les coefficients a_n doivent vérifier
$$a_n[(n+\alpha)(n+\alpha-1)-2] = 0 \ . \tag{1}$$
La condition $a_0 \neq 0$ conduit à l'équation indicielle $\alpha(\alpha-1)=2$, dont les solutions sont $\alpha = 2$ et $\alpha = -1$. Pour $\alpha = 2$ l'équation (1) donne $a_n n(n+3) = 0$, on a donc $a_n = 0$ pour $n \geq 1$, la solution correspondante est $y(z) = a_0(z-1)^2$. Pour $\alpha = -1$ l'équation (1) donne $a_n n(n-3) = 0$, qui autorise $a_0 \neq 0$ et $a_3 \neq 0$. On peut supposer $a_3 = 0$ car sinon on obtient de nouveau la solution précédente, on a donc la deuxième solution linéairement indépendante $y(z) = a_0/(z-1)$.
2. $z=0$ est un point régulier de l'équation de Hermite, on peut donc chercher ses solutions sous la forme $y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. En insérant cette forme dans l'équation on obtient l'équation de récurrence
$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)} a_n \ ,$$
qui ne couple pas les coefficients a_n pour n pair avec ceux pour n impair. Une fois choisis a_0 et a_1 tous les coefficients se calculent selon
$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{1}{(2p)!}\lambda(\lambda-4)\dots(\lambda-4p+4)(-1)^p a_0 \ , \\ a_{2p+1} &= \frac{1}{(2p+1)!}(\lambda-2)(\lambda-6)\dots(\lambda-4p+2)(-1)^p a_1 \ . \end{aligned}$$
Deux solutions indépendantes de l'équation sont obtenues par les choix $(a_0, a_1) = (1,0)$ et $(a_0, a_1) = (0,1)$. Pour que l'une des deux soit polynomiale il faut que λ soit un entier pair, de sorte que les coefficients d'une des deux séries s'annulent au delà d'un certain rang. En particulier pour $\lambda = 4$ on trouve que $y(z) = 1 - 2z^2$ est une des solutions.

3. **Changements de variable**

(a) Les points $t = 1$ et $t = -1$ sont des points Fuchsiens pour l'équation de Legendre. Pour étudier la nature du point à l'infini on définit $\widetilde{y}(u) = \widehat{y}(1/u)$, solution de

$$\widetilde{y}'' + \frac{2u}{u^2 - 1}\widetilde{y}' + \frac{\nu(\nu+1)}{u^2(u^2-1)}\widetilde{y} = 0 \ .$$

Le point $u = 0$ est Fuchsien pour l'équation sur $\widetilde{y}$, donc $t = \infty$ est Fuchsien pour l'équation de Legendre.

(b) Avec ce changement de variable on trouve que $y(z)$ est solution de

$$(\alpha^2 - (z-\beta)^2)y'' - 2(z-\beta)y' + \nu(\nu+1)y = 0 \ .$$

(c) Pour que le coefficient de y'' s'annule en $z = 0$ et $z = 1$ on voit qu'il faut choisir $\alpha = \beta = 1/2$. On identifie alors les coefficients $(a, b, c) = (1 + \nu, -\nu, 1)$ de l'équation hypergéométrique.