Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°6

Equations différentielles

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Solutions en série d'équations différentielles

Les équations différentielles suivantes portent sur une fonction inconnue $y(z)$. Pour chacune d'entre elles vous déterminerez la nature du point $z = 0$ et trouverez deux solutions indépendantes sous forme de séries en puissances de z :

1. $$y'' + y = 0 \ . \tag{1}$$

2. $$y'' - \frac{2}{(1-z)^2} y = 0 \ . \tag{2}$$

3. $$4zy'' + 2y' + y = 0 \ . \tag{3}$$

4. $$z(z-1)y'' + 3zy' + y = 0 \ . \tag{4}$$

   Pour cette équation, utiliser la méthode du Wronskien pour trouver la deuxième solution.

2 Exercices maison

1. Considérer de nouveau l'équation (2), discuter la nature du point $z = 1$ et retrouver les solutions sous forme de séries en puissances de $(z - 1)$.
2. L'équation de Hermite est
   $$y'' - 2zy' + \lambda y = 0 \ . \tag{5}$$
   Pour quelles valeurs de λ cette équation admet-elle des solutions polynomiales ? Trouver une telle solution pour $\lambda = 4$.

3. **Changements de variable**

Considérons une fonction $\widehat{y}(t)$ solution de l'équation différentielle de Legendre

$$\widehat{y}'' - \frac{2t}{1-t^2}\widehat{y}' + \frac{\nu(\nu+1)}{1-t^2}\widehat{y} = 0 \ , \tag{6}$$

où ν est un paramètre réel avec $\nu \geq -1/2$.

(a) Déterminer la position et la nature des points singuliers de cette équation (sans oublier le point $t = \infty$).

(b) On fait un changement de variable affine pour définir une nouvelle fonction $y(z)$, selon $\widehat{y}(t) = y(z = \alpha t + \beta)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par y.

(c) Choisir α et β de manière à ce que y soit solution de l'équation hypergéométrique

$$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0 \ , \tag{7}$$

où l'on explicitera les coefficients a, b et c.

De tels changments de variables permettent de montrer l'équivalence d'un grand nombre d'équations différentielles avec l'équation hypergéométrique, ce qui explique l'importance de la fonction hypergéométrique $F(a, b, c; z)$ solution de (7) dans l'étude des équations différentielles.