Airy avec méthode du col

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + xs\right) ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\underbrace{\cos\left(\frac{1}{3}s^3+xs\right)}_{\text{pair en } s} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{1}{3}s^3+xs\right)}_{\text{impair}}\Big) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds\; e^{i\left(\frac{1}{3}s^3 + xs\right)}$$

$$s = x^{1/2} z \qquad s^3 = x^{3/2} z^3 \qquad xs = x^{3/2} z$$

$$= \frac{x^{1/2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\; e^{i x^{3/2}\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right)}$$

de la forme $\int dz\, e^{x^{3/2} f(z)}$ avec $x^{3/2} \to \infty$, $f(z) = i\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right)$

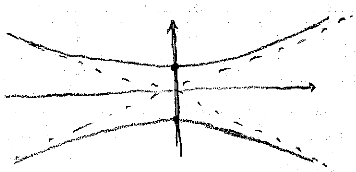
$$f'(z) = i\left(z^2+1\right), \quad f''(z) = 2iz$$

cols en $z = \pm i$, $\quad f(i) = i\left(-\frac{1}{3}i + i\right) = -\frac{2}{3}$

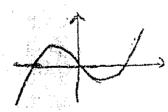
$$f(-i) = i\left(\frac{1}{3}i - i\right) = \frac{2}{3}$$

$\mathrm{Im}\, f(z) = 0$ pour avoir les lignes qui passent par ces points, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{3}(x+iy)^3 + x + iy\right) = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + x = 0$ soit $x = 0$, soit $\frac{1}{3}x^2 - y^2 + 1 = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+1)}$



le long de $x=0$, $f(z) = i\left(\frac{1}{3}(iy)^3 + iy\right) = \frac{y^3}{3} - y$

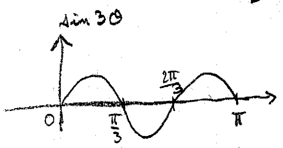


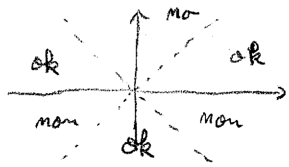
$\Rightarrow$ Re f est max en $-i$, min en $+i$ dans ces directions, inversé pour les deux autres

comment peut-on déformer l'axe réel à l'∞ avec contributions négligeables ?

c'est z^3 qui domine, $\mathrm{Re}(iz^3) = -\mathrm{Im}\, z^3 = -\rho\sin(3\theta)$ $\Rightarrow$ il faut avoir $\sin 3\theta > 0$ pour que cela soit négligeable $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ok, mais pas $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$

$\theta \in \left[\pi - \frac{\pi}{6}, \pi\right] \Rightarrow 3\theta \in \left[3\pi - \frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$, à 2π près $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ok





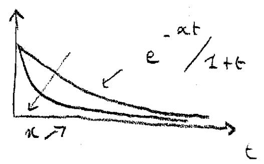
$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \iff \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\iff \theta = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ on peut déformer pour passer par le col en i, où $|f''(i)| = 2$, $\alpha = \pi$

$$Ai(x) \sim \frac{x^{1/2}}{2\pi}\, e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{x^{3/2}}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{x^{1/4}}$$

Développement asymptotique

1. 

pour $x > 0$ l'intégrale converge à l'∞ grâce à l'exponentielle

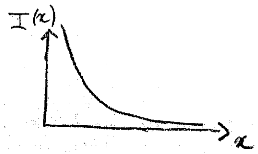
à $x = 0$ diverge car $\sim \frac{1}{t}$

à $x < 0$ l'intégrand diverge $\Rightarrow$ intégrale n'est pas définie

à t fixé l'intégrand décroît avec x $\Rightarrow$ l'intégrale aussi

th convergence dominée (ou monotone) pour avoir $\lim\limits_{x \to \infty} I(x) = 0$

convergence monotone pour $I(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \infty$

$\Rightarrow$ 

2. $$e^{-xt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{x} e^{-xt}\right)$$

$$I(x) = \int_0^\infty dt \, \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{x} e^{-xt}\right) \frac{1}{1+t}$$

$$= \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{1+t}\right]_0^\infty + \frac{1}{x}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\left\{ \left[-\frac{1}{x} e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^\infty - \frac{2}{x}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^3} \right\}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^3}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^3}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^4}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \frac{4!}{x^5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n \frac{n!}{x^n}\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^{n+1}}$$

$$a_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$R_n(x) = \frac{1}{x^n}(-1)^n n! \underbrace{\int_0^\infty dt \, e^{-xt} \frac{1}{(1+t)^{n+1}}}_{\underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0} \quad \Rightarrow \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

3. $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty$: $R_{cv} = 0$ en effet si R_{cv} était > 0, cela convergerait pour tout x complexe avec $|x| > \frac{1}{R_{cv}}$, en particulier pour $x < -\frac{1}{R_{cv}}$ réel négatif, où on a vu que l'intégrale divergeait