Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°5

Développements asymptotiques

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 La fonction gamma d'Euler

La fonction gamma d'Euler est définie, pour les réels $x > 0$, par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}u \, e^{-u} \, u^{x-1} \ . \tag{1}$$

1. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$.
2. Démontrer la relation $\Gamma(x+1) = x \, \Gamma(x)$.
3. En déduire les valeurs de $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n+(1/2))$ pour n entier.

2 Méthode de Laplace

On rappelle que la méthode de Laplace fournit un équivalent des intégrales de la forme

$$\int_a^b \mathrm{d}t \, e^{xf(t)} g(t) \underset{x\to\infty}{\sim} e^{xf(t_0)} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(t_0)}} g(t_0) \ , \tag{2}$$

quand f a un unique maximum au point $t_0 \in]a,b[$, l'intervalle d'intégration pouvant être infini.

1. Justifier brièvement ce développement.
2. Pour quelle valeur de u, notée u_0, est atteinte le maximum de l'intégrand dans (1) ? Poser $t = u/u_0$ pour mettre l'expression de $\Gamma(x+1)$ sous la forme (2).
3. En déduire l'approximation de Stirling pour les factorielles, $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$.

3 Méthode du col

La méthode du col fournit un équivalent quand $x \to \infty$ d'intégrales dans le plan complexe, $\int_\gamma \mathrm{d}z e^{xf(z)} g(z)$, où γ est un contour contenu dans le domaine d'holomorphie des fonctions f et g.

1. Rappeler l'allure des lignes $\mathrm{Re} f(z) =$ cste et $\mathrm{Im} f(z) =$ cste au voisinage d'un point z_0 pour une fonction holomorphe avec $f'(z_0) \neq 0$. Quelles sont les lignes de plus grande pente de $\mathrm{Re} f(z)$ et $\mathrm{Im} f(z)$?
2. Tracer ces lignes pour la fonction $f(z) = z^2$, dans tout le plan complexe.
3. Rappeler l'allure des parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe $f(z)$ au voisinage d'un point z_0 où $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$, et justifier ainsi le nom de point col (ou selle) attribué à un tel z_0.

4. Montrer qu'une déformation opportune du contour γ au voisinage du point col z_0 permet d'appliquer la méthode de Laplace et d'obtenir

$$\int_\gamma \mathrm{d}z\, e^{xf(z)}\, g(z) \underset{x\to\infty}{\sim} \pm e^{xf(z_0)} \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}} g(z_0) e^{i\frac{\pi-\alpha}{2}} \tag{3}$$

où $f''(z_0) = |f''(z_0)|e^{i\alpha}$, le signe dépendant du sens de parcours de l'intégrale.

5. On veut retrouver le développement de Stirling par cette méthode du col.
   (a) Que vaut, pour n entier positif, l'intégrale

   $$\oint_\gamma \mathrm{d}z\, \frac{e^{(n+1)z}}{z^{n+1}} \tag{4}$$

   quand γ est un contour fermé entourant l'origine ?
   (b) Mettre l'intégrand sous la forme $e^{(n+1)f(z)}$, et étudier la fonction f, en particulier la position de son point col, et les courbes $\mathrm{Im} f(z) = \text{cste}$ passant par ce point.
   (c) En déformant de manière appropriée le contour γ, obtenir de nouveau l'approximation de Stirling.

4 Exercices maison

1. On cherche l'équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de la fonction d'Airy définie sous forme intégrale comme

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{3}s^3 + xs\right) \mathrm{d}s. \tag{5}$$

   (a) Par un changement de variable, mettre cette fonction sous la forme

   $$\mathrm{Ai}(x) = \frac{x^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^{3/2}\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right)}\, \mathrm{d}z. \tag{6}$$

   (b) Etudier la fonction $f(z) = i(z^3/3 + z)$, en particulier la position de ses points-cols, les courbes $\mathrm{Im} f(z) = \text{cste}$ passant par ces points, et les secteurs du plan complexe pour lesquels $\mathrm{Re} f(z) \to -\infty$ quand $|z| \to \infty$.
   (c) En déduire l'équivalent

   $$\mathrm{Ai}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} \quad . \tag{7}$$

2. Considérons la fonction $I(x)$ définie pour $x > 0$ par

$$I(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{e^{-xt}}{1+t} \; . \tag{8}$$

   (a) Tracer l'allure de l'intégrand en fonction de t, pour différentes valeurs de x, et en déduire l'allure de la fonction $I(x)$. Discuter le cas $x < 0$.
   (b) Montrer que l'on peut écrire le développement asymptotique suivant pour $x \to \infty$,

   $$I(x) = a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \cdots + a_n \frac{1}{x^n} + R_n(x) \qquad \text{avec} \quad R_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right) \; , \tag{9}$$

   en déterminant les coefficients a_n et le reste $R_n(x)$. *Indication : vous pouvez faire des intégrations par partie dans (8).*
   (c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$?