Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°4

Corrigé des exercices maison

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^4+b^4} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^4+b^4} dx \ .$$

La fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4+b^4}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ avec $z_k = b e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{k\pi}{2}}$ les solutions de $z^4 + b^4 = 0$. Grâce au lemme de Jordan on peut refermer le contour d'intégration avec un demi-cercle à l'infini dans le demi-plan supérieur, et évaluer cette intégrale sur un contour fermé avec le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} 2i\pi \left[\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^4+b^4}, z_0 \right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z^4+b^4}, z_1 \right] \right] = \frac{1}{2} 2i\pi \left[\frac{e^{iz_0}}{4z_0^3} + \frac{e^{iz_1}}{4z_1^3} \right] \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2} b^3} e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}} \left[\cos\left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right) + \sin\left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right) \right] \ . \end{aligned}$$

$$J_2 = \int_0^\pi (\sin\theta)^{2n} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n} d\theta = \frac{1}{2i} \oint dz \frac{1}{z} \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right)^{2n} = \frac{1}{(2i)^{2n+1}} \oint dz \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} \ ,$$

où les intégrales de contour sont sur le cercle unité. La fonction $f(z) = \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}$ a un pôle d'ordre $2n+1$ en $z=0$, pour calculer son résidu on peut développer le numérateur avec la formule du binôme :

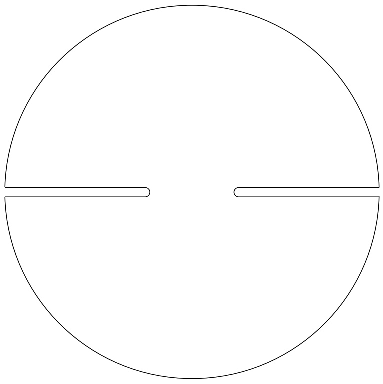
$$f(z) = \frac{1}{z^{2n+1}} \sum_{p=0}^{2n} \binom{2n}{p} z^{2p} (-1)^{2n-p} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Res}\left[f(z), z=0\right] = \binom{2n}{n} (-1)^n \ ,$$

en considérant le terme $p = n$ de la somme. Comme $i^{2n} = (-1)^n$, l'application du théorème des résidus conduit finalement à

$$J_2 = \frac{\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \ .$$

$$J_3 = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad :$$

on considère la fonction $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^{1/2}(z+1)^{1/2}}$, qui a un pôle simple en $z=0$ et deux points de branchement en $z = \pm 1$. On met les coupures sur $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ en définissant $z = 1 + r_1 e^{i\theta_1}$ avec $r_1 \geq 0$ et $\theta_1 \in [0, 2\pi[$, $(z-1)^{1/2} = \sqrt{r_1} e^{i\theta_1/2}$, et $z = -1 + r_2 e^{i\theta_2}$ avec $r_2 \geq 0$ et $\theta_2 \in [-\pi, \pi[$, $(z+1)^{1/2} = \sqrt{r_2} e^{i\theta_2/2}$. On considère $\oint dz f(z)$ sur le chemin fermé (parcouru dans le sens direct) de la figure :



Chacun des quatre segments de ± 1 à $\pm\infty$ légèrement au-dessus et au-dessous de l'axe réel donne une contribution égale à J_3, et le cercle à l'infini ne contribue pas à l'intégrale. Le résidu de f en $z = 0$ vaut $1/i$, ce qui donne finalement

$$J_3 = \frac{\pi}{2} \ .$$