Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°4

Séries de Laurent, théorème de Cauchy et calcul d'intégrales

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Séries de Taylor et de Laurent

1. Démontrer la convergence uniforme de la série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ sur tout disque de centre 0 et de rayon $R < 1$.
2. Soit une fonction $f(z)$ holomorphe sur un domaine D et $z_0 \in D$. Montrer que la fonction $f(z)$ peut être représentée par une série entière

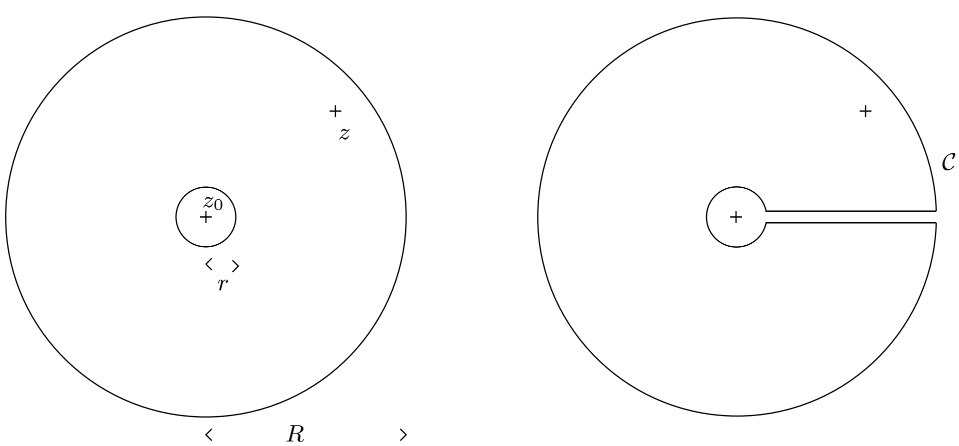
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dans tout disque centré sur z_0 et contenu dans D, les coefficients de la série étant

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(y)}{(y - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}y \ .$$

Indication : utiliser d'abord la formule intégrale de Cauchy, sur un chemin γ bien choisi. Développer ensuite le dénominateur en utilisant la série géometrique.

3. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans une couronne circulaire K de centre z_0 et de rayons r et R, comme schématisé sur la figure :



Montrer que l'on peut représenter $f(z)$ dans K par la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n (z - z_0)^n \ ,$$

dont les coefficients valent

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(y)}{(y - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}y \ ,$$

le chemin γ étant le cercle de centre z_0 et de rayon r.
Indication : on commencera par utiliser la formule intégrale de Cauchy sur le chemin $\mathcal{C}$ de la figure de droite, on utilisera ensuite la même stratégie que pour le point précédent.

4. On appelle résidu d'une fonction en z_0 le coefficient d_{-1} de sa série de Laurent en z_0. Donner le développement de Laurent autour de $z = 0$, son domaine de convergence, et le résidu en $z = 0$, de la fonction

$$f(z) = (z^4 + 1) \sin\left(\frac{1}{z}\right) \ .$$

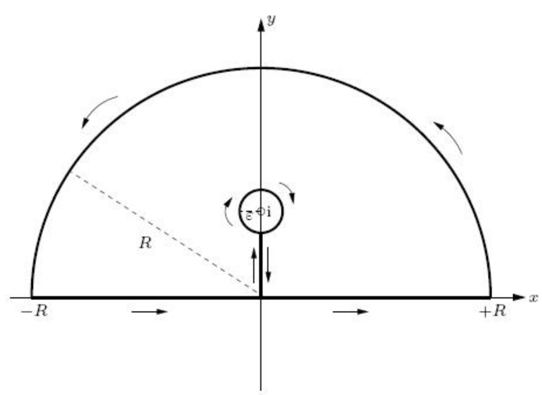
2 Une utilisation de la formule de Cauchy

1. On considère la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{1 + z^2} \quad , \tag{1}$$

où k est un réel positif. Sur quel domaine du plan complexe $f(z)$ est-elle analytique ?

2. Que vaut $\int_\gamma dz\ f(z)$, avec γ le chemin fermé défini sur la figure :



3. On décompose γ en trois chemins. γ_1 est le segment de l'axe réel reliant $-R$ à R, γ_2 le demi-cercle de centre l'origine et de rayon R et γ_3 le cercle de centre i et de rayon ϵ. Justifier l'absence dans cette décomposition du chemin le long de l'axe imaginaire, et exprimer $\int_\gamma dz\ f(z)$ en fonction des intégrales sur les chemins γ_1, γ_2 et γ_3, en précisant l'orientation des contours.
4. Montrer que la contribution de γ_2 s'annule quand $R \to \infty$.
5. Expliciter la contribution de γ_3, et prendre la limite $\epsilon \to 0$ (on pourra utiliser le théorème de convergence dominée).
6. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \frac{e^{ikx}}{1 + x^2} = \pi e^{-k} \quad . \tag{2}$$

Comment devrait-on adapter le calcul pour $k < 0$?

3 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème de Cauchy

1. Rappeler la valeur de $\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x$. En intégrant la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ sur un chemin approprié du plan complexe, calculer

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \ .$$

2. En intégrant la fonction $f(z) = e^{iz}/z$ dans le plan complexe, calculer

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \ .$$

3. Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ikx}\, e^{-x^2} \mathrm{d}x \ ,$$

en utilisant l'intégrale de la fonction complexe e^{-z^2} le long d'un rectangle de base $[-R, R]$ et de hauteur bien choisie.

4 Calculs d'intégrales à l'aide du théorème des résidus

Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration dans le plan complexe :

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$I_4 = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^4+(1-\pi^2)x^2-\pi^2)}\,\mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\alpha\cos\theta} \qquad (\text{pour } -1 < \alpha < +1)$$

$$I_6 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} \qquad (\text{pour } 0 < \alpha < 1)$$

$$I_7 = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2, \quad n > 1+\alpha > 0)$$

$$I_8 = \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}{(1+x)^3}\,\mathrm{d}x$$

5 Calculs de sommes de séries à l'aide du théorème des résidus

En utilisant la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^4 \sin \pi z}$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.$$

6 Exercices maison

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + b^4} dx \quad , \quad b > 0 \\ J_2 &= \int_0^{\pi} \sin^{2n} \theta d\theta \quad , \quad n \in \mathbb{N} \\ J_3 &= \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$