Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°3

Corrigé des exercices maison

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. (a) On a $\mathrm{d}z = [\sinh(t) + i\cosh(t)]\mathrm{d}t$ et l'intégrale devient donc

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\sinh(t) + i\cosh(t)}{\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2} \ . \tag{1}$$

Le terme avec $\sinh(t)$ au numérateur donne zéro, car on intègre une fonction impaire. Dans l'autre terme, on peut poser $u = \sinh(t)$, avec $\mathrm{d}u = \cosh(t)\mathrm{d}t$, et on obtient donc, sachant que $\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2 = 1$,

$$i\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \frac{1}{1+2u^2} = i\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^2} = \frac{i}{\sqrt{2}} \arctan(x)\big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{i\pi}{\sqrt{2}} \ . \tag{2}$$

(b) En utilisant une paramétrisation $z = x$, $z = 1 + t(i-1)$, $z = iy$ sur les trois cotés du triangle, on trouve

$$\int_0^1 \mathrm{d}x x^2 + (i-1)\int_0^1 \mathrm{d}t[(1-t)^2 + t^2] + i\int_1^0 \mathrm{d}y y^2 = \frac{i-1}{3} \ . \tag{3}$$

(c) On utilise la paramétrisation $z = x$ pour le segment d'axe réel, et $z = 1 + e^{i\theta}/2$ avec $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta/2$, pour le demi-cercle, et on a

$$\int_{1/2}^{3/2} \mathrm{d}x(x-1)^2 + \frac{i}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta e^{3i\theta} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\ e^{3i\theta}\big|_0^{\pi} = 0 \ . \tag{4}$$

Ce résultat est attendu car on intègre une fonction analytique sur un chemin fermé.

(d) On a $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z = x$. En utilisant les paramétrisations $z = x$, $z = 1+iy$, $z = x+i$, $z = iy$ sur les quatres côtés du carré, on trouve

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, 2x + i\int_0^1 \mathrm{d}y\, 2 + \int_1^0 \mathrm{d}x\, 2x + i\int_1^0 \mathrm{d}y\, 0 = 2i \ . \tag{5}$$

2. On pose $w = z^{-2}$ et on a donc

$$w = \log z = \log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \ . \tag{6}$$

On trouve donc deux classes infinies de solutions

$$z = \frac{1}{\sqrt{w}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\log|z| + i\arg(z) + 2\pi i n}} \ . \qquad n \in \mathbb{Z} \ . \tag{7}$$

On veut trouver les solutions telles que

$$|z| = \frac{1}{((\log|z|)^2 + (\arg(z) + 2\pi n)^2)^{1/4}} \leq \varepsilon \ . \tag{8}$$

Il est clair que cette condition est satisfaite pour tout $n > n_0(\varepsilon, z)$ ou $n < n_1(\varepsilon, z)$, donc elle admet un nombre infini de solutions.

3. (a) Pôle simple en $z = 2$
   (b) Pôle double en $z = 0$ et pôle simple en $z = \infty$
   (c) Singularité essentielle en $z = 0$
   (d) Pôle triple en $z = 0$, singularité essentielle en $z = \infty$
   (e) Points de branchement d'ordre 2 en $z = 0, \pm i, \infty$