Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°2

Corrigé des exercices maison

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. Pour résoudre ce type d'exercice on peut soit intégrer les équations de Cauchy-Riemann, soit plus directement reconnaître la fonction holomorphe f dont u est la partie réelle, et en déduire v comme la partie imaginaire de f (cette méthode est correcte car une fonction holomorphe de partie réelle constante est constante).

   a) $u(x,y) = x^3 + 3x(1-y^2) = \text{Re }((x+iy)^3 + 3(x+iy))$, donc $f(z) = z^3 + 3z + i\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. On en déduit $v(x,y) = -y^3 + 3yx^2 + 3y + \alpha$.

   b) $u(x,y) = \cos y \cosh x = \text{Re } \cosh(x+iy)$, $f(z) = \cosh z + i\alpha$, $v(x,y) = \sinh x \sin y + \alpha$.

   c) $u(x,y) = e^{-x}[(1+x)\cos y + y \sin y] = \text{Re } e^{-x-iy} + e^{-x-iy}(x+iy)$, $f(z) = e^{-z}(1+z) + i\alpha$, $v(x,y) = e^{-x}[-(1+x)\sin y + y\cos y] + \alpha$.

2.

   a) $f(z) = \frac{z}{i+z}$ a un pôle simple en $z = -i$.

   b) $g(z) = \frac{3z^2+4}{z^2-16}$ a deux pôles simples en $z = 4$ et $z = -4$ (on vérifie facilement que le numérateur ne s'annule pas en ces points).

   c) $h(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ est singulière aux points où $\sin z = 0$. Cette équation s'écrit $e^{iz} - e^{-iz} = 0$, soit $e^{2iz} = 1$, dont toutes les solutions dans le plan complexe sont $z = \pi n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En ces points ni le numérateur ni la dérivée du dénominateur s'annule, ce sont donc des pôles simples.

   d) $l(z) = \frac{\sin z - z}{z \sin z}$ est a priori singulière aux points $z = \pi n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ où le dénominateur s'annule. Toutefois $z = 0$ n'est qu'une singularité apparente, car $\lim_{z\to 0} l(z)$ existe (et vaut 0) ; les points $z = \pi n$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sont des pôles simples.

3. On peut montrer plus généralement que si $g(z)$ est holomorphe, $f(z) = \bar{z}\, g(z)$ ne l'est pas, car elle ne vérifie pas les équations de Cauchy-Riemann. En utilisant les notations de l'exercice 1, $\bar{\partial} f = (\bar{\partial}\bar{z})g + \bar{z}\bar{\partial} g = g \neq 0$.