Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°2

Fonctions analytiques et variables complexes

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Dérivabilités au sens de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{C}$

1. Pour une fonction $F(x,y) = f(z = x + \mathrm{i}y)$, y a-t-il équivalence entre la différentiabilité de F et la dérivabilité de f au sens complexe ?
2. On introduit les opérateurs différentiels
$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
agissant sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de deux variables réelles à valeurs complexes. Calculer ∂z, $\partial \bar{z}$, $\bar{\partial} z$ ainsi que $\bar{\partial}\bar{z}$.
3. Si f est holomorphe, montrer que
$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,,$$
où $z = x + \mathrm{i}y$. Récrire les conditions d'analyticité de Cauchy-Riemann et calculer ∂F, $\bar{\partial} F$, $\partial \bar{F}$ et $\bar{\partial}\bar{F}$.
4. Calculer $\partial\bar{\partial}$ (en supposant que l'opérateur agit sur des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$). Montrer que si f est holomorphe, alors
$$4\,|f'(z)|^2 = \Delta(|F|^2)\,.$$

2 Application des formules de Cauchy-Riemann

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine du plan complexe. On notera $z = x + \mathrm{i}y$ et $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ avec u, v les parties réelles et imaginaires de f.

1. On considère un point $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Montrer que les lignes $u(x,y) = u(x_0,y_0)$ et $v(x,y) = v(x_0,y_0)$ s'intersectent à angle droit en (x_0,y_0).
On suppose maintenant que $f'(z_0) = 0$ et $f''(z_0) \neq 0$. Quelle est l'allure de la surface $u(x,y)$ au voisinage de (x_0,y_0) ?
2. Déterminer $f(z)$ sachant que $f(0) = 0$ et :
a) $v(x,y) = 3x^2y - y^3$;
b) $v(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$.
3. Quelles sont les conditions sur les nombres réels a, b, c, d pour que la fonction
$p(z = x + \mathrm{i}y) = f((ax + by) + \mathrm{i}(cx + dy))$ soit holomorphe, f étant holomorphe ?

3 Singularités

Déterminer en quels points les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes sur le plan complexe, et discuter la nature de leurs singularités :

a) $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$
b) $g(z) = \frac{3z^2-2}{z^2+2z+5}$
c) $h(z) = \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}$
d) $l(z) = \exp 1/z$

4 Exemple d'une frontière essentielle

Soit $f(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$. Montrer que la série converge dans le disque $|z| < 1$ et qu'elle a une singularité en $z = 1$. Montrer que f satisfait les relations fonctionnelles $f(z) = z^2 + f(z^2)$, et plus généralement $f(z) = z^2 + z^4 + z^8 + \cdots + z^{2^p} + f(z^{2^p})$ pour tout p entier. En déduire que f a aussi des singularités en toute racine 2^p-ième de l'unité.

5 Exercices maison

1. Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction holomorphe. Trouver la partie imaginaire $v(x, y)$ sachant que :
   a) $u(x, y) = x^3 + 3x(1 - y^2)$;
   b) $u(x, y) = \cos y \cosh x$;
   c) $u(x, y) = e^{-x}[(1 + x) \cos y + y \sin y]$.

2. Trouver les singularités dans le plan complexe des fonctions suivantes et discuter leur nature.
   a) $f(z) = \frac{z}{i+z}$
   b) $g(z) = \frac{3z^2+4}{z^2-16}$
   c) $h(z) = \cot z$
   d) $l(z) = \frac{\sin z - z}{z \sin z}$
3. Montrer que $f(z) = \bar{z} \tanh((\ln z)^2)$ n'est pas holomorphe.