Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : TD n°1

Corrigé des exercices maison

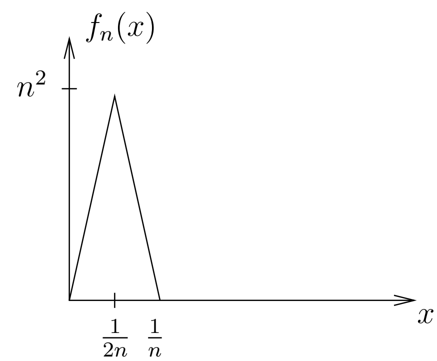
Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. Notons $u_m(x) = \frac{1}{2^m} \sin mx$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ la norme de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On a $\|u_m\|_\infty = \frac{1}{2^m}$, donc $\sum_m \|u_m\|_\infty = \sum_m \frac{1}{2^m} < \infty$. La série converge normalement, donc la suite de fonctions f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa limite.

   On peut ainsi intervertir limite et intégration, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} \sin mx \right) \mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} \int_0^{2\pi} \sin mx \ \mathrm{d}x = 0 \ .\end{aligned}$$

2. Les fonctions $f_n(x)$ ont l'allure suivante :



   Pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$, et donc $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

   Cependant $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n/2$, qui diverge donc quand $n \to \infty$. En effet la convergence de la suite n'est pas uniforme, il n'est donc pas légitime d'intervertir l'intégration et la limite.