Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : TD n°1

Suites et séries, convergence uniforme

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Suites de Cauchy

Nous rappelons qu'un espace vectoriel E, sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est dit normé s'il est muni d'une fonction $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$, appelée norme, qui vérifie les propriétés suivantes pour tout $x, y \in E$:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Rappelons également la définition d'une suite de Cauchy : *Une suite u_n d'éléments de E, espace vectoriel normé, est dite de Cauchy (ou satisfaisant le critère de Cauchy) si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N : \forall n, n' > N \quad \|u_n - u_{n'}\| < \epsilon \, . \tag{1}$$

1. Démontrez le théorème suivant :
   (a) Toute suite de Cauchy est bornée.
   (b) Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergeant vers l converge elle-même vers l.
2. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. On le munit de la norme

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \right\| = \max_{0 \leq i \leq n} |\alpha_i| \, . \tag{2}$$

   (a) Vérifiez que (2) est bien une norme.
   (b) On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrez qu'il s'agit d'une suite de Cauchy. Converge-t-elle dans $\mathbb{R}[x]$? Que peut-on en conclure sur $\mathbb{R}[x]$?

2 Convergence uniforme

1. Considérons la suite des fonctions $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.
   (a) En considérant des quotients de termes successifs de la suite $\frac{x^k}{k!}$, montrez la convergence absolue pour tout $x \in \mathbb{C}$. La fonction limite s'appelle la fonction exponentielle e^x.
   (b) Montrer que le reste de la somme, $r_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, vérifie

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n}} \tag{3}$$

   pour x fixé et $n > |x|$.

(c) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $C_R = \{x \in \mathbb{C} | \, |x| < R\}$, $R \in \mathbb{R}$? Sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

2. Considérez les séries de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ pour les $g_k(x)$ suivantes. Convergent-elles ? Si oui, simplement ou uniformément ? La limite, si elle existe, est-elle continue ?

(a)
$$g_k(x) = \begin{cases} 0\,, & x < k \\ (-1)^k\,, & x \geq k\,. \end{cases}$$

(b)
$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k^2}\,, & |x| < k \\ \frac{1}{x^2}\,, & |x| \geq k\,. \end{cases}$$

(c)
$$g_k(x) = x^k\,,\ x \in (0,1)\,.$$

3. Montrez que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} x^3$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3 Intégration

1. Soit la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$. Vers quoi converge cette suite pour un x donné ? La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? Et sur $[1,2]$? En trouvant le maximum de $f_n(x)$ par rapport à n pour un $x > 0$ donné, montrer que $f_n(x) \leq \frac{3^{3/4}}{4\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. Calculer alors $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$. Comparer avec le calcul direct de $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.
2. On considère la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^n\,, & 2^{-n} < x < 2^{-(n-1)} \\ 0\,, & \text{ailleurs}\,. \end{cases}$$

Montrer que f_n est dominée par une fonction simple, indépendante de n. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$?

4 Exercices maison

1. Soit $f_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2^m} \sin mx$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe.
   (b) Est-ce que la convergence est uniforme ?
   (c) Evaluer
$$\int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\,.$$
2. Soit
$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x\,, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 - 2n^3\left(x - \frac{1}{2n}\right)\,, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0\,, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. Représenter $f_n(x)$ et calculer $\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.