Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Zhihao Duan – Sylvain Nascimbène

Séance du 14 décembre 2018

TD 9 : Moments cinétiques et parité

---

1 Addition de deux moments cinétiques

On considère initialement deux spins $\frac{1}{2}$, $\widehat{\mathbf{S}}_1$ et $\widehat{\mathbf{S}}_2$. On note $\widehat{\mathbf{S}}$ le spin total du système.

1. Justifier que $\widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{S}}_1 \otimes \widehat{1} + \widehat{1} \otimes \widehat{\mathbf{S}}_2$. Quelles sont les valeurs propres possibles pour $\widehat{S}^2$ et $\widehat{S}_z$?
2. Exprimer explicitement ces opérateurs dans la base canonique, et en déduire leur base propre commune.

On considère maintenant l'addition d'un moment cinétique orbital $l = 1$ et d'un spin $\frac{1}{2}$, résultant en un moment total $\widehat{J}$. Plutôt que de diagonaliser explicitement $\widehat{J}^2$ et $\widehat{J}_z$, on utilise les propriétés générales des opérateurs $\widehat{J}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{J}_x + i\widehat{J}_y)$ et $\widehat{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{J}_x - i\widehat{J}_y)$ (valables pour n'importe quel opérateur de moment cinétique $\widehat{\mathbf{J}}$) :

$$\widehat{J}_+|j,m> \;=\; \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}|j,m+1> \tag{1}$$
$$\widehat{J}_-|j,m> \;=\; \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}|j,m-1> . \tag{2}$$

3. Montrer que les états $|l = 1, s = \frac{1}{2}, m_1 = \pm 1, m_2 = \pm\frac{1}{2} >$ sont états propres de $\widehat{J}^2$ et $\widehat{J}_z$.
4. En déduire une base propre commune de $\widehat{J}^2$ et $\widehat{J}_z$.

2 Désintégration d'un Λ_0. Violation de la parité

On s'intéresse ici aux implications de la symétrie par parité (cf le TD 6) sur la prédiction de résultats d'expériences de diffusion/désintégration en physique des particules. Cette symétrie impose par exemple des contraintes fortes sur les résultats d'émission de photon par un atome excité (sous l'effet de l'interaction électromagnétique), mais il a été prouvé en 1957 que l'interaction faible viole la parité. Wu et Lederman ont en effet mesuré l'existence d'une direction préférentielle d'émission du neutrino dans la réaction de désintégration β de ^{60}Co :

$$^{60}\mathrm{Co} \rightarrow \ ^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \nu_e.$$

Pour simplifier, on considère la désintégration d'une particule appelée Λ_0. Celle-ci est de spin 1/2 et se désintègre en environ 2,6$\times 10^{-6}$ s en un proton p^+ (de spin 1/2) et un méson Π^- (de spin 0) :

$$\Lambda_0 \rightarrow p^+ + \Pi^-.$$

Dans tout ce qui suit, on se place dans le référentiel où le Λ_0 est initialement au repos et on notera $\widehat{\mathbf{J}}$ le moment cinétique du système.

5. On suppose le spin du Λ_0 polarisé dans l'état $m = 1/2$. Dans quel état de moment cinétique le système se trouve-t-il après la désintégration ?

6. Montrer qu'après la désintégration, on a $\widehat{\mathbf{J}} = \widehat{\mathbf{L}} + \widehat{\mathbf{S}}$, où $\widehat{\mathbf{L}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{S}}$) désigne l'opérateur moment cinétique orbital relatif du proton et du méson (resp. l'opérateur spin du proton). Quelles sont les valeurs permises pour l et m_l ?

Pour pouvoir prédire la façon dont les produits de désintégration se déplacent, il faut en particulier connaître l'état du moment cinétique orbital $\widehat{\mathbf{L}}$. Afin de tirer cette information à partir du spin du Λ_0, on doit savoir exprimer ce spin $\widehat{\mathbf{J}}$ sur les bases associées à $\widehat{\mathbf{L}}$ et $\widehat{\mathbf{S}}$. On rappelle que lors du couplage de deux moments cinétiques $\widehat{\mathbf{L}}$ et $\widehat{\mathbf{S}}$, le passage de la base couplée à la base découplée se met sous la forme :

$$|l, s, j, m_j\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, s, m_l, m_s | j, m_j\rangle |l, m_l; s, m_s\rangle,$$

où $\langle l, s, m_l, m_s | j, m_j\rangle$ désignent les coefficients de Clebsch-Gordan.

7. Quelles valeurs de l sont a priori possibles pour le moment cinétique $\widehat{\mathbf{L}}$? Construire alors la base propre à $\widehat{\mathbf{J}}^2$ et $\widehat{\mathbf{J}}_z$ pour $l = 1$.
8. En déduire qu'après la désintégration, les variables de spin et de moment angulaire relatif sont dans un état $|\psi\rangle$ de la forme :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \Big(\sqrt{2} |l = 1, m_l = 1; s = 1/2, m_s = -1/2\rangle - |l = 1, m_l = 0; s = 1/2, m_s = 1/2\rangle \Big) \otimes |R_1\rangle$$

$$+ \beta |l = 0, m_l = 0; s = 1/2, m_s = 1/2\rangle \otimes |R_2\rangle,$$

où les $|R_i\rangle$ sont deux kets de l'espace $\mathcal{E}_r$ décrivant la dynamique dans la direction radiale et où α et β satisfont la condition de normalisation $|\beta|^2 + |\alpha|^2 = 1$.
9. À partir de la question précédente, montrer que la probabilité $\mathrm{d}^2 P$ d'émission du proton dans l'angle solide $\mathrm{d}^2\Omega$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}^2 P = (1 + \rho \cos(\theta)) \frac{\mathrm{d}^2\Omega}{4\pi},$$

où l'on exprimera ρ en fonction de α, β et du produit scalaire des fonctions radiales. On donne :

$$\begin{cases} Y_0^0(\theta, \phi) = 1/\sqrt{4\pi}, \\ Y_1^{\pm 1}(\theta, \phi) = \mp\sqrt{3/8\pi} \sin(\theta) \exp(\pm i\phi), \\ Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{3/4\pi} \cos(\theta). \end{cases}$$

10. Quel est l'état du Λ_0 après une symétrie miroir ? En utilisant le principe de Curie, quelle valeur de ρ attend-on ? On mesure $\rho = 0,62$. Qu'en déduit-on ?

Références :

"Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay",
C.S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).

Cours de Physique de Feynman, tome de Mécanique Quantique, section 17-5.