Mécanique quantique – L3

Emmanuel Baudin – Tom Bienaimé – Sylvain Nascimbène

TD 4 : Autour de l'oscillateur harmonique

On s'intéresse dans tout le problème à un oscillateur harmonique à une dimension, avec un hamiltonien H_0 :

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{z}^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}^2. \tag{1}$$

Dans cette expression $\hat{z}$ et $\hat{p}$ sont les opérateurs de position et d'impulsion, m la masse de l'oscillateur et ω_0 sa pulsation de résonance. Montrer que l'on peut écrire

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0\hat{\mathcal{H}} \tag{2}$$

avec

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\hat{Z}^2 + \hat{P}^2\right)\,, \tag{3}$$

où on donnera les expressions des opérateurs $\hat{Z}$ et $\hat{P}$.

1 États cohérents

On cherche à construire des états quantiques de l'oscillateur harmonique dont l'évolution est semblable à celle de l'oscillateur classique correspondant.

1.1 Retour sur la dynamique classique

1. Écrire l'équation classique du mouvement sur x et la résoudre pour les conditions initiales

$$\begin{cases} z(0) = A \\ \dot{z}(0) = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

   Quelle est l'impulsion p correspondante ?

2. Décrire le mouvement dans l'espace des phases $(z, p/m\omega_0)$ à l'aide de la quantité :

$$z + ip/m\omega_0. \tag{5}$$

1.2 Rappel : résolution classique de l'oscillateur harmonique

1. On définit l'opérateur

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Z} + i\hat{P}\right)\,. \tag{6}$$

   Calculer $[\hat{Z}, \hat{P}]$ et montrer que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

2. On pose maintenant $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. Calculer $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger]$ et $[\hat{N}, \hat{a}]$.
3. Soit ν une valeur propre de $\hat{N}$ et $|\phi_\nu\rangle$ un vecteur propre associé. Démontrer les propriétés suivantes :
   (a) $\nu \geq 0$.
   (b) Si $\hat{a}|\phi_\nu\rangle \neq 0$, alors $\hat{a}|\phi_\nu\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{N}$ de valeur propre $\nu - 1$.
   (c) $\hat{a}^\dagger|\phi_\nu\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{N}$ de valeur propre $\nu + 1$.
   (d) Le spectre de $\hat{N}$ est inclus dans $\mathbb{N}$.
4. En déduire le spectre $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\hat{H}_0$ (on ordonne les énergies de sorte que $E_0 < E_1 < \ldots$). Montrer qu'il n'est pas dégénéré. On note alors $|n\rangle$ un état propre de $\hat{H}_0$ de valeur propre E_n.
5. Montrer que $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.
6. En déduire que la fonction d'onde correspondant à l'état $|n\rangle$ est

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0 \times 2^n \times n!}} \left[z\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} - \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \right]^n \exp\left(-\frac{m\omega_0 z^2}{2\hbar} \right) . \tag{7}$$

1.3 Propriétés des états cohérents

On définit l'état cohérent $|\alpha\rangle$ comme l'état propre de l'opérateur $\hat{a}$ de valeur propre α :

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \,. \tag{8}$$

1. Calculer les coefficients C_n du développement de $|\alpha\rangle$ sur les états propres $|n\rangle$, tels que :

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n\,|n\rangle \,. \tag{9}$$

2. Calculer la valeur moyenne de $\hat{H}_0$ dans l'état $|\alpha\rangle$, et la variance associée. Que vaut $\Delta E/E$ quand $|\alpha|$ est très grand ? Comment interpréter ce résultat ?
3. Calculer les valeurs moyennes de $\hat{z}$ et de $\hat{p}$ dans l'état $|\alpha\rangle$, et les variances associées Δz^2 et Δp^2. Quel commentaire peut-on faire ?
4. L'oscillateur est préparé à $t = 0$ dans l'état $|\Psi(0)\rangle = |\alpha\rangle$. Montrer que l'état $|\Psi(t)\rangle$ reste un état cohérent, caractérisé par un $\alpha(t)$ que l'on précisera.
5. Donner la fonction d'onde $\psi_\alpha(z)$ dans l'état $|\alpha\rangle$.
6. Représenter l'évolution temporelle de l'état du système dans l'espace des phases, la comparer à la dynamique classique de l'oscillateur et conclure.