Relativité et Électromagnétisme : TD de soutien n°6
— L7 —

Propriétés d'un faisceau gaussien polarisé circulairement

Sébastien LEURENT, Marc LILLEY & Sylvain NASCIMBÈNE

23 mai 2012

1. Écrire les amplitudes complexes des champs électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{B}$ d'une onde plane monochromatique de pulsation ω et d'amplitude E_0 **polarisée circulairement** se propageant suivant l'axe (Oz). Réécrire ces expressions dans les coordonnées cylindriques d'axe (Oz). On utilisera le choix de phase $e^{i(kz-\omega t)}$ et on introduira "l'hélicité“ ϵ de la polarisation qui est le sens de rotation du champ électrique pour un observateur qui voit l'onde arriver vers lui (i.e. qui regarde dans la direction des z décroissant).
2. En réalité l'onde n'est que "quasi-plane“ : elle présente une extension latérale finie. En d'autres termes, par rapport à la situation précédente, l'amplitude E_0 devient une fonction $E_0(r)$ qui tend vers zéro quand on s'éloigne de l'axe (Oz). Montrer que si l'on remplace simplement E_0 par $E_0(r)$ dans les expressions précédentes on obtient une structure d'onde incompatible avec les équations de Maxwell.
3. Cherchons une solution aux équations de Maxwell dans le cas où l'extension transverse de l'onde reste très supérieure à la longueur d'onde. Pour fixer les idées, on pourra considérer que l'amplitude varie selon une loi gaussienne : $E_0(r) = E_0 e^{-r^2/w^2}$ avec $w \gg \lambda$. Montrer qu'en ajoutant une composante longitudinale au champ électrique, on peut trouver une solution aux équations de Maxwell (au premier ordre en λ/w) qui s'écrit :
$$\boldsymbol{E}(r,\theta,z) = \left[E_0(r)\frac{\boldsymbol{u}_r + i\epsilon\boldsymbol{u}_\theta}{\sqrt{2}} + \frac{i}{k}\frac{E_0'(r)}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_z\right] e^{i(kz-\omega t+\epsilon\theta)}$$
avec $\boldsymbol{B} = -i\epsilon\boldsymbol{E}/c$
4. Calculer les densités volumiques moyennes d'énergie u, d'impulsion $\boldsymbol{p}$ et de moment cinétique $\boldsymbol{m}$ transportées par l'onde électromagnétique.
5. Calculer les valeurs intégrales de ces quantités et montrer que seules les composantes longitudinales de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{M}$ sont non nulles.
6. Calculer l'énergie électromagnétique totale U de l'onde (sur une longueur L suivant (Oz)) et montrer que l'on a :
$$P_z = \frac{U}{c} \quad \text{et} \quad \mathrm{M_z} = \epsilon\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{ck}}$$
7. Interpréter ces résultats en termes de photons.

On donne :
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{u}_z$$