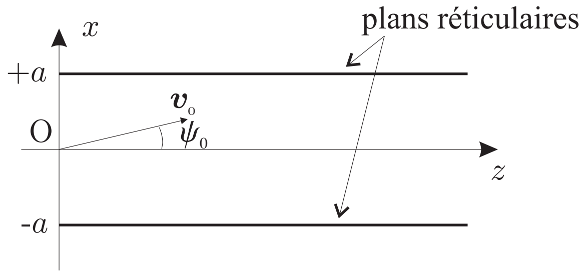
Relativité et Électromagnétisme : TD de soutien n^{o}5
— L7 —

Canalisation d'un faisceau de positons relativistes

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

16 mai 2012

Un monocristal de silicium est orienté avec précision grâce à un goniomètre. On envoie sur le cristal un faisceau monocinétique de positons ultrarelativistes dont l'énergie peut varier entre 100 MeV et 10 GeV. La géométrie de l'expérience est représentée sur la figure ci-dessous. La face d'entrée du cristal est dans le plan (xOy) et le faisceau de positons, supposé infiniment fin, pénètre dans le cristal au point O selon une direction voisine de l'axe (Oz) ($\psi_0 \ll 1$).



On néglige l'interaction entre les positons ainsi que le freinage dû au rayonnement de la particule chargée. On modélise le champ électrique entre les plans réticulaires $x = \pm a$ par $\boldsymbol{E} = -Kx\,\boldsymbol{e}_x$ où K est une constante positive. Le potentiel électrique est noté ϕ, il est nul en $x = 0$ et vaut 40 V en $x = \pm a$.

1. On introduit les paramètres $A = eKa^2/(mc^2)$ et $\eta = (eK/m)^{1/2}$, où $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg est la masse du positon. Interpréter physiquement ces deux nombres et leur donner une valeur numérique pour $2a = 1,92 \times 10^{-10}$ m.

On se propose de déterminer le mouvement d'un positon qui se trouve à l'instant $t = 0$ au point O avec la vitesse $\boldsymbol{v}_0$. On pose $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$.

2. Quelles sont les quantités conservées au cours du mouvement. Écrire les équations correspondantes.
3. Montrer que la composante transverse $p_x(t)$ de la quantité de mouvement du positon vérifie toujours $|p_x(t)| \leq |p_x(0)|$.
4. On pose $\delta = p_x(0)/(mc)$. Montrer que la valeur maximale du potentiel que le positon peut atteindre, compte tenu des conditions initiales, est donnée par :

$$\phi_{\max} = \frac{mc^2}{e}\left[\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - \delta^2}\right] . \tag{1}$$

5. Soit $x_{\max}$ la valeur maximale de $x(t)$. En faisant les approximations qui s'imposent, montrer que :

$$x_{\max}^2 = \frac{a^2\delta^2}{A\gamma_0} , \tag{2}$$

   Puis exprimer $x_{\max}$ en fonction de A, a, γ_0 et ψ_0.

6. Donner la condition de canalisation du positon par une inégalité liant δ, A et γ_0. Montrer que cette condition équivaut à $|\psi_0| < \psi_c$ et donner l'expression de l'angle critique ψ_c.
7. Pour un faisceau d'énergie 100 MeV, calculer numériquement ψ_c et la valeur maximale de δ correspondante. Commenter cette valeur.
8. Justifier que $\gamma(t) \simeq \gamma_0$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement transverse $x(t)$ et montrer qu'elle admet une solution sinusoïdale de pulsation ω que vous exprimerez en fonction de η et γ_0. Donner l'expression de $x(t)$.
9. Évaluer ω et la fréquence correspondante pour un faisceau d'énergie 100 MeV.
10. Préciser les deux conditions que doivent vérifier $|\mathrm{d}x/\mathrm{d}t|$ d'une part et $|p_x|$ d'autre part, pour que le mouvement transversal du positon soit non-relativiste. Montrer qu'elles sont réalisées dans le cas où $\delta \ll 1$.