Relativité et Électromagnétisme : TD de soutien n°2
— L7 —

Notation indicielle et calcul tensoriel

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

22 fevrier 2012

1 Espace Euclidien

On se propose dans cet exercice de revenir sur quelques manipulations tensorielles dans l'espace à trois dimensions. On utilise la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. La métrique étant la métrique euclidienne,

$$g_{ij} = g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il est habituel de ne pas distinguer entre les indices covariants et contravariants et de tous les écrire en bas. Dans ce contexte, on définit le tenseur de Kronecker (ou symbole de Kronecker) :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et le tenseur totalement antisymétrique (ou de Levi-Civita) :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation paire de } (1,2,3) \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \text{ est une permutation impaire de } (1,2,3) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

1.1 Quelques propiétés du tenseur ϵ_{ijk}

1. Montrer que $c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ est équivalent à $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.
2. Montrer que :
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \qquad \text{et} \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{1}$$
3. Montrer que
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \tag{2}$$
Obtenir enfin les identités (1) par *contraction* sur l'identité (2). Vérifier que cette identité est équivalente à la formule habituelle du double produit vectoriel.
4. Si $M = m_{ij}$ est une matrice 3×3, exprimer le déterminant de M à l'aide du tenseur ϵ_{ijk}.

1.2 Application : formules d'analyse vectorielle

1. Écrire, en notation indicielle, les opérateurs gradient, divergence, rotationnel, laplacien scalaire, laplacien vectoriel et *a-scalaire-gradient*. On pourra noter ∂_i l'opérateur différentiel $\partial/\partial x_i$.
2. Que valent $\mathbf{rot}(\mathbf{grad} f)$ et $\div(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a})$?
3. Exprimer $\div(f\boldsymbol{a})$ puis $\div(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.
4. Calculer $\mathbf{rot}(f\boldsymbol{a})$ puis $\mathbf{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ et enfin $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\, \boldsymbol{a})$.
5. Etablir l'expression de $\mathbf{grad}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. On pourra partir de l'expression de $\boldsymbol{a} \times \mathbf{rot}\, \boldsymbol{b}$ et de $\boldsymbol{b} \times \mathbf{rot}\, \boldsymbol{a}$.
6. Montrer que $\triangle\, \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{a}$.

2 Espace Minkowskien

On se place maintenant dans l'espace de Minkowski muni de la métrique :

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette métrique permet de définir des composantes covariantes à partir de composantes contravariantes et vice-versa :

$$A_\mu \equiv g_{\mu\nu} A^\nu \qquad , \qquad B^\mu \equiv g^{\mu\nu} B_\nu$$

1. Exprimer ${g^\mu}_\nu$ et ${g_\mu}^\nu$.
2. Que valent les composantes covariantes du quadrivecteur $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$? Expliciter $\partial_\mu A^\mu$ et $\partial^\mu A_\mu$.
3. On définit le tenseur contravariant de Levi-civita comme

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ est une permutation paire de } (0,1,2,3) \\ -1 & \text{si } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ est une permutation impaire de } (0,1,2,3) \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

   Montrer qu'il s'agit bien d'un tenseur. Connaissez-vous d'autres tenseurs dont les composantes ne dépendent pas du référentiel ?
4. Que valent les composantes covariantes $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$?
5. On considère un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation à la vitesse $\boldsymbol{v}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. On définit le tenseur de Lorentz ${\Lambda^\mu}_\nu$ reliant les composantes dans $\mathcal{R}'$ et dans $\mathcal{R}$ d'un même quadrivecteur par : $x'^\mu = {\Lambda^\mu}_\nu x^\nu$. Expliciter les composantes de ${\Lambda^\mu}_\nu$, ${\Lambda_\mu}^\nu$, $\Lambda^{\mu\nu}$ et $\Lambda_{\mu\nu}$.
6. Calculer ${(\Lambda^{-1})^\mu}_\nu$.
7. Montrer que ${\Lambda^\mu}_\nu {\Lambda_\mu}^\alpha = \delta^\alpha_\nu$.