Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens

Partiel du 20 novembre 2018

Michela Petrini, Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Fonctions holomorphes et singularités

1. Montrer qu'aucun choix de la fonction $v(x, y)$ ne peut rendre la fonction
$$f(z = x + \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 + \mathrm{i}v(x, y)$$
holomorphe.
2. Determiner les singularités de la fonction
$$f(z) = \frac{1}{\cos(1/z)} \ .$$
3. Considérer la fonction
$$f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt[3]{z-\mathrm{i}} \ .$$
Identifier ses points de branchement et leur ordre. Expliquer pourquoi une seule coupure ne suffit pas à construire une fonction holomorphe univaluée. Proposer un choix minimal de coupures.

2 Séries de Taylor et de Laurent

1. Donner le développement de Taylor autour de $z = 0$, et son domaine de convergence, de la fonction
$$f(z) = (1 + z)^a \ , \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$
2. Donner les développements de Laurent de la fonction
$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} \ ,$$
dans les couronnes
$$\begin{aligned} &(a) \quad 1 < |z| < 3 \ , \\ &(b) \quad |z| > 3 \ , \\ &(c) \quad 0 < |z+1| < 2 \ . \end{aligned}$$
Il conviendra d'écrire $f(z)$ comme la somme de terms de la forme $A/(z-z_0)$ avant de commencer le développement.

3 Intégration

1. Determiner pour quelles valeurs du paramètre réel a l'intégrale suivante existe et la calculer à l'aide du theorème des résidus :
$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta - 4a^2} \ .$$
2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, les intégrales
$$\text{a)} \quad \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^n} \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{1+x^n} \ .$$

4 Les zéros de fonctions holomorphes

On considère une boucle simple γ dans le plan complexe, orientée dans le sens direct, son intérieur Ω, et une fonction $f(z)$ holomorphe dans Ω. On suppose que f a M zéros dans Ω, aux points $z_1, \ldots, z_M$, d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_M$.

1. Calculer l'intégrale suivante
$$I_1 = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \mathrm{d}z \frac{f'(z)}{f(z)} \ .$$
2. Généraliser votre réponse en considérant
$$I_2 = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \mathrm{d}z \frac{f'(z)}{f(z)} z^p \ .$$
3. Calculer finalement
$$I_3 = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \mathrm{d}z \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \ ,$$
où g est holomorphe dans Ω.
4. Proposer une méthode pour compter les points stationnaires d'une fonction h holomorphe dans Ω.

5 Sommation de série

Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. Dans quel domaine du plan complexe est-elle holomorphe ?
2. Calculer les résidus pour tous ses pôles.
3. En déduire, à l'aide d'une intégrale de contour de f que vous justifierez brièvement, l'identité suivante :
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)^2} \ .$$
4. Etudier la limite $a \to 0$ de cette identité, en isolant le terme $n = 0$ dans la somme, pour obtenir
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \ .$$