Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens

Corrigé du partiel du 20 novembre 2018

Michela Petrini, Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Fonctions holomorphes et singularités

1. A cause des conditions de Cauchy-Riemann les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques : si $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ est holomorphe, alors $\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le Laplacien. On observe que $u(x,y) = x^2 + y^2 = \mathrm{Re} f(z)$ satisfait
$$\Delta u(x,y) = 4 \neq 0 \ .$$
La fonction $f(z)$ ne peut donc pas être holomorphe.

2. La fonction est singulière en $z = 0$ et dans tous les zéros du cosinus, donc en $z_n = 1/(\pi/2 + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Les points z_n sont des singularités isolées. En utilisant la règle de L'Hôpital, la limite
$$\lim_{z\to z_n} \frac{z - z_n}{\cos(1/z)} = \lim_{z\to z_n} \frac{z^2}{\sin(1/z)} = \frac{(-1)^n}{(\pi/2 + \pi n)^2}$$
est finie, les points z_n sont donc des pôles simples. Le point $z = 0$ est une singularité non isolée, car dans n'importe quel cercle $|z| < \epsilon$ on trouve un nombre infini de singularités z_n.

3. La fonction $f(z)$ a trois points de branchement, $z = -1$, $z = \mathrm{i}$ et $z = \infty$.
   — En faisant un petit tour autour de $z = -1$, la fonction $\sqrt[3]{z - \mathrm{i}}$ est holomorphe et ne change pas de branche, alors que $\sqrt{z+1}$ prend une phase $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$ et change de signe. $z = -1$ est donc un point de branchement d'ordre 2.
   — En faisant un petit tour autour de $z = \mathrm{i}$, la fonction $\sqrt{z+1}$ est holomorphe et ne change pas de branche, alors que $\sqrt[3]{z - \mathrm{i}}$ prend une phase $e^{2\mathrm{i}\pi/3}$ et change de branche. On revient à la branche de départ après trois tour, de sorte que la phase soit $(e^{2\mathrm{i}\pi/3})^3 = 1$. $z = \mathrm{i}$ est donc un point de branchement d'ordre 3.
   — Faire un tour autour de $z = \infty$ revient par exemple à choisir un chemin $|z| = R$ avec $R \to \infty$. Dans ce cas, on a $f(z) \approx \sqrt{z}\sqrt[3]{z} = z^{5/6}$. A chaque tour la fonction prend donc une phase $e^{2\pi\mathrm{i}5/6} = e^{\pi\mathrm{i}5/3}$. Il faut faire 6 tours pour revenir a la branche de départ, $z = \infty$ est donc un point de branchement d'ordre 6.

   La fonction $f(z)$ a donc 6 branches dans le plan $\mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}, \infty\}$. Puisque il y a trois points de branchement, une seule coupure ne suffirait pas a empecher de faire les tour de ces trois points. Un choix raisonable de coupures est par exemple $C_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ et $C_1 = \{z = \mathrm{i}t, t \in \mathbb{R}, t \geq 1\}$.

2 Séries de Taylor et de Laurent

1. On peut calculer les derivées de $f(z)$ et on trouve
$$f^{(n)}(z) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)(1+z)^{a-n+1} \ .$$

La série de Taylor en $z = 0$ est donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \qquad a_n = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!} \ .$$

On observe que si $a \in \mathbb{N}$, toutes les derivées sont nulles pour $n > a$, et la série de Taylor est un polynôme, son rayon de convergence est alors infini. Pour $a \notin \mathbb{N}$ tous les coefficients a_n sont non-nuls, on peut calculer le rayon de convergence par la formule

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)}{(a-n)} \right| = 1 \ .$$

En effet si $a \notin \mathbb{N}$ la fonction $f(z) = (1+z)^a$ est singulière en $z = -1$, le disque de convergence de la série de Taylor en $z = 0$ ne peut dépasser ce point.

2. On commence par écrire

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+3}\right) \ .$$

Ensuite,

(a) On peut développer en $z = 0$ qui est le centre de la couronne. On a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1/z}{1+1/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^n \ , \qquad \text{pour } |z| > 1 \ . \quad (1)$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1/3}{1+z/3} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n \ , \qquad \text{pour } |z| < 3$$

Combinant ces deux résultats on obtient la série de Laurent de $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n \ , \qquad d_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^{n+1} & n \leq -1 \ , \\ \frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} & n \geq 0 \ . \end{cases}$$

(b) Comme dans le cas précédent on développe en $z = 0$. Le premier développement, Eq. (1), reste valide. Le deuxième doit être modifié :

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1/z}{1+3/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-3)^{-n-1}z^n \ , \qquad \text{pour } |z| > 3$$

Le résultat pour la série de Laurent est obtenu en combinant l'Eq. (1) avec ce dernier résultat,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} d_n z^n \ , \qquad d_n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} - (-3)^{-n-1}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

(c) On doit développer en $z = -1$ qui est le centre de la couronne. La fonction $1/(z+1)$ est déjà une série de Laurent en puissances de $(z+1)$. Pour l'autre terme, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2+(z+1)} = \frac{1/2}{1+(z+1)/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

La série de Laurent est donc

$$f(z) = \frac{1}{2(z+1)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}(z+1)^n \ .$$

3 Intégration

1. L'intégrale est définie si le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire pour $|a| > 1/2$. Comme l'intégrale est une fonction paire de a on suppose dans un premier temps $a > 1/2$. En utilisant l'identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta$ on peut transformer l'intégrale en

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta - 4a^2} = -2\pi - (4a^2-1)\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\cos^2\theta - 4a^2}\,.$$

Pour calculer cette nouvelle intégrale on pose $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, et on interprète l'intégrale comme une intégrale sur le circle unitaire centré en $z = 0$ dans $\mathbb{C}$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\cos^2\theta - 4a^2} \quad = \quad \frac{4}{i}\oint_{C_1} dz \frac{z}{(z^2+1)^2 - 16a^2z^2}\,,$$

qu'on évalue à l'aide du théorème des résidus. La fonction intégrande

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2 - 16a^2z^2}$$

a quatre pôles simples en

$$z^1_\pm = 2a \pm \sqrt{4a^2-1} \qquad\qquad z^2_\pm = -2a \pm \sqrt{4a^2-1}\,.$$

Comme $\sqrt{4a^2-1} > 2a - 1$ pour tout $|a| > 1/2$, on a toujours $|z^1_-| < 1$ et $|z^2_+| < 1$. Donc les pôles z^1_- et z^2_+ se trouvent à l'intérieur du chemin d'intégration, alors que z^1_+ et z^2_- sont à l'extérieur. Les résidus de f en $z^1_- = -z^2_+$ sont

$$\mathrm{Res}[f, z^1_-] = \mathrm{Res}[f, z^2_+] = -\frac{1}{16a\sqrt{4a^2-1}}\,,$$

et le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned}\frac{4}{i}\oint_{C_1} dz \frac{z}{(z^2+1)^2 - 16a^2z^2} &= 8\pi\left[\mathrm{Res}[f, z^1_-] + \mathrm{Res}[f, z^2_+]\right] \\ &= -\frac{\pi}{a\sqrt{4a^2-1}}\,.\end{aligned}$$

On conclut à l'aide de la parité en a de l'intégrale que quelque soit a avec $|a| > 1/2$,

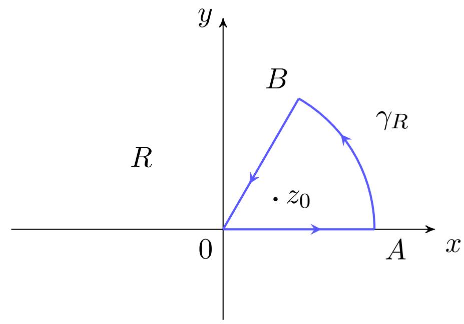
$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta - 4a^2} = -2\pi + \pi\frac{\sqrt{4a^2-1}}{|a|}\,.$$

2. Considérons d'abord l'intégrale a). On doit montrer que cette intégrale est équivalente à la limite d'une intégrale sur une boucle dans le plan complexe. Comme pour n impair la fonction

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

n'a pas de parité définie, on ne peut pas choisir comme chemin d'intégration un demi-cercle dans le demi-plan supérieur ou inférieur. Mais on montre facilement qu'un bon contour est $\Gamma_R = OA \cup \gamma_R \cup BO$, où le segment OB forme un angle de $e^{2i\pi/n}$ avec l'axe réel positif (voir figure). Si on decompose Γ_R , on trouve

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_R} dz \frac{1}{1+z^n} &= \int_{OA} dz \frac{1}{1+z^n} + \int_{\gamma_R} dz \frac{1}{1+z^n} + \int_{BO} dz \frac{1}{1+z^n} \\ &= \int_0^R dx \frac{1}{1+x^n} + \int_{\gamma_R} dz \frac{1}{1+z^n} - e^{2\pi i/n}\int_0^R dx \frac{1}{1+x^n}\end{aligned}$$



où on a pris $z = x$ sur OA et $z = e^{2\pi i/n}x$ sur OB. Dans la limite $R \to \infty$, l'intégrale sur γ_R tend vers zéro par le premier Lemme de Jordan et on obtient

$$\oint_{\Gamma_R} dz \frac{1}{1+z^n} \underset{R\to\infty}{=} (1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^n} \,. \tag{2}$$

On évalue maintenant $\oint_{\Gamma_R}$ à l'aide du théorème des résidus. La fonction $f(z)$ a n pôles simples en

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \,.$$

Comme le contour Γ_R contient seulement le pôle z_0, on a

$$\oint_{\Gamma_R} \mathrm{d}z f(z) = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z), z_0] = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n} \,. \tag{3}$$

Comparant (2) et (3), on trouve

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n} e^{i\pi/n} (1 - e^{2\pi i/n})^{-1} = \frac{\pi}{n} (\sin\frac{\pi}{n})^{-1} \,,$$

avec $(1 - e^{2\pi i/n})^{-1} = -e^{-\pi i/n}(2i \sin\frac{\pi}{n})^{-1}$.

On passe à l'intégrale b). Dans le plan complexe le logarithme est multivalué. Pour appliquer le théorème des résidus, il faut doit choisir une coupure et se restreindre à un domaine où le logarithme est holomorphe. On prend comme coupure l'axe des réels négatifs et la détermination principale du logarithme : $\ln z = \ln|z| + i\theta$ avec $\theta \in (-\pi, \pi)$. Dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ la fonction

$$f(z) = \frac{\ln z}{1+z^n}$$

a n pôles simples en

$$z_k = e^{i\pi(1+2k)/n} \qquad k = 0, \dots, n-1 \,.$$

Pour appliquer le théorème des résidus on choisit le même contour Γ_R qu'au point a) auquel on enlève un petit arc, γ_ϵ, de rayon ϵ autour du zéro. Seul le pôle $z_0 = e^{i\pi/n}$ est dans Γ_R et on a

$$\oint_{\Gamma_R} \mathrm{d}z f(z) = 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 2\pi i \frac{\ln z_0}{n z_0^{n-1}} = \frac{2\pi^2}{n^2} e^{i\pi/n} \,. \tag{4}$$

Si on calcule l'intégrale sur Γ_R explicitement, on voit que pour $R \to \infty$ et $\epsilon \to 0$ les intégrales sur γ_R et γ_ϵ tendent vers zéro, et celle sur le segment OA, où $z = x$, donne

$$\int_{OA} \mathrm{d}z f(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\ln x}{1+x^n} \,.$$

Sur le segment BO on a $z = re^{2i\pi/n}$ et

$$\int_{BO} \mathrm{d}z f(z) = -e^{2i\pi/n} \int_0^\infty \mathrm{d}r \frac{\ln r + 2\pi i/n}{1+x^n} \, .$$

Donc

$$\oint_{\Gamma_R} \mathrm{d}z f(z) = (1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\ln x}{1+x^n} - \frac{2\pi i}{n} e^{2i\pi/n} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^n} \, . \tag{5}$$

Si on compare avec (4) on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{\ln x}{1+x^n} &= (1 - e^{2\pi i/n})^{-1} \left[\frac{2\pi^2}{n^2} e^{i\pi/n} + \frac{2\pi i}{n} e^{2i\pi/n} \int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{1}{1+x^n} \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{n^2} (\sin \frac{\pi}{n})^{-2} \cos \frac{\pi}{n} \, , \end{aligned} \tag{6}$$

où on a utilisé le résultat du point a) et la relation $(1 - e^{2\pi i/n})^{-1} = -e^{-\pi i/n}(2i \sin \frac{\pi}{n})^{-1}$.

4 Les zéros de fonctions holomorphes

1. Dans Ω la fonction f'/f a des singularités isolées aux points $z_1, \ldots, z_M$. Comme z_k est un zéro d'ordre n_k on peut écrire $f(z) = (z - z_k)^{n_k} f_k(z)$, où f_k est holomorphe et ne s'annule pas en z_k. On a donc

$$f'(z) = n_k (z - z_k)^{n_k - 1} f_k(z) + (z - z_k)^{n_k} f_k'(z) \, , \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_k}{z - z_k} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} \, .$$

   Le deuxième terme est régulier en z_k, on voit donc que f'/f a des pôles simples aux points $z_1, \ldots, z_M$, de résidus respectifs $n_1, \ldots, n_M$. En calculant l'intégrale par le théorème des résidus on obtient donc

$$I_1 = \sum_{k=1}^{M} n_k \, ,$$

   ce qui compte les zéros de f dans Ω, avec leurs multiplicités éventuelles.

2. En multipliant f'/f par la fonction holomorphe z^p on obtient une fonction qui a de nouveau des pôles simples aux points z_k, les résidus étant multipliés par z_k^p, et donc

$$I_2 = \sum_{k=1}^{M} n_k z_k^p \, .$$

3. Avec le même raisonnement on obtient

$$I_3 = \sum_{k=1}^{M} n_k g(z_k) \, .$$

4. Les points stationnaires de h sont les zéros de $f = h'$, donc

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \mathrm{d}z \frac{h''(z)}{h'(z)}$$

   compte les points stationnaires de h dans Ω, avec leurs multiplicités.

5 Sommation de série

1. La fonction $f(z) = \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ a un pôle double en $z = -a$, et des pôles pour tous les points où $\sin(\pi z)$ s'annule, c'est-à-dire pour $z \in \mathbb{Z}$. Ces derniers sont des pôles simples car la dérivée de $\sin(\pi z)$ y est non-nulle, et parce que $a \notin \mathbb{Z}$. La fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{Z} \cup \{-a\})$.
2. Pour le pôle double en $z = -a$,

$$\mathrm{Res}[f; z=-a] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+a)^2 f(z)\bigg|_{z=-a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\pi}{\sin \pi z}\bigg|_{z=-a} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)^2}\bigg|_{z=-a} = -\frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)^2} .$$

   Pour le pôle simple en $z = n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Res}[f; z=n] = \lim_{z \to n} \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\pi(z-n)}{\sin \pi z} = \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}$$

   puisque $\sin(\pi z) = \pi \cos(\pi n)(z-n) + O((z-n)^2)$ dans cette limite, et $\cos(\pi n) = (-1)^n$.
3. On considère l'intégrale de $f(z)$ le long d'un cercle γ_R centré sur l'origine et de rayon $R = k + \frac{1}{2}$, où k est entier. D'après le théorème des résidus cette intégrale vaut $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus à l'intérieur du contour, soit en supposant $|a| \leq k$

$$\sum_{n=-k}^{k} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} - \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)^2} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_R} \mathrm{d}z \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} .$$

   Quand $k \to \infty$ le membre de droite s'annule : le contour étant un cercle de rayon $k + 1/2$ il y a, uniformément en k, une distance minimale entre les points z du contour d'intégration et les zéros de $\sin(\pi z)$ qui sont les entiers relatifs. On a donc $|\sin(\pi z)| \geq \delta > 0$ sur le contour, ainsi

$$\left| \oint_{\gamma_R} \mathrm{d}z \frac{1}{(z+a)^2} \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right| \leq \frac{\pi}{\delta} \oint_{\gamma_R} \mathrm{d}z \frac{1}{|z+a^2|} .$$

   Comme le périmètre de γ_R est d'ordre k, alors que le facteur $1/|z+a|^2$ est d'ordre $1/k^2$ le membre de droite de cette équation est $O(1/k)$, d'où l'identité du texte.
4. On a donc

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin(\pi a)^2} - \frac{1}{a^2} ,$$

   et en passant à la limite quand $a \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2(1 - \frac{1}{2}(\pi a)^2 + O(a^4))}{(\pi a)^2 - \frac{1}{3}(\pi a)^4 + O(a^6)} - \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{\pi^2}{12} .$$