Complément de cours sur le mouvement Brownien

JF ALLEMAND

October 21, 2015

1 DÉRIVATION DE LA RELATION DE KUBO

De manière générale quand $t \to \infty$ à une dimension:

$$< (\vec{r}(t) - \vec{r}(0))^2 >= 6Dt$$

où D est le coefficient de diffusion de la particule considérée et la moyenne prise sur différentes observations.
Or en dérivant le premier terme par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} < (\vec{r}(t) - \vec{r}(0))^2 >=< 2\vec{v}(t)(\vec{r}(t) - \vec{r}(0)) >=< 2\vec{v}(t)\int_0^t \vec{v}(t')dt' >= 2\int_0^t < \vec{v}(t)\vec{v}(t') > dt'$$

Par invariance par translation dans le temps la valeur moyenne ne peut dépendre que de la différence des temps :$< \vec{v}(t)\vec{v}(t') >=< \vec{v}(t-t')\vec{v}(0) >$. En effectuant le changement de variable $\tau = t - t'$ on obtient en prenant la limite quand t tend vers l'infini (on suppose que tout se passe bien de ce côté mathématique là et que cette limite existe bien) :

$$3D = \int_0^\infty < \vec{v}(\tau)\vec{v}(0) > d\tau$$

2 OBTENTION DES TEMPS COURTS ET DU RÉGIME BALISTIQUE

L'équation du mouvement de la particule Brownienne à une dimension est :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + F_L(t)$$

En multipliant cette relation par x et en prenant la valeur moyenne sur différentes réalisations on obtient :

$$m < \ddot{x}x >= m < \frac{d}{dt}(\dot{x}x) - \dot{x}^2 >= -\alpha < x\dot{x} > + < F_L(t)x >$$

Or $< F_L(t)x >$ est nul car il ne peut pas y avoir de relation entre la force de Langevin à un instant et la position au même instant $< F_L(t)x >=< F_L(t) >< x >= 0\times < x >= 0$, et par ailleurs le théorème d'équipartition donne $< \dot{x}^2 >= \frac{k_B T}{m}$. On en déduit :

$$\frac{d}{dt} < (\dot{x}x) >= \frac{k_B T}{m} - \frac{\alpha}{m} < x\dot{x} >$$

Cette relation peut s'intégrer facilement :

$$< (\dot{x}x) >= \frac{k_B T}{\alpha} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$. On peut faire l'hypothèse que $x(0) = 0$ ce qui permet d'obtenir $A = -\frac{k_B T}{\alpha}$. En remarquant que $< (\dot{x}x) >= \frac{d}{2dt} < x^2 >$ on en déduit

$$\frac{1}{2} < x^2(t) >= \frac{k_B T}{\alpha}(t + \tau(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1))$$

Pour $t \ll \tau$ on voit que

$$< x^2(t) >\sim \frac{k_B T}{m} t^2$$

on a donc un régime balistique aux temps courts. Pour $t \gg \tau$ alors

$$< x^2(t) >= 2\frac{k_B T}{\alpha} = 2Dt$$

ce qui permet de retrouver la relation de Stockes-Einstein $D = \frac{k_B T}{\alpha}$.