

**Versuche zur Messung  
der Avogadro-Loschmidtschen Zahl aus der  
Brownschen Bewegung einer Drehwaage<sup>1)</sup>**

**Von Eugen Kappler**

(Mit 11 Figuren)

Inhalt: I. Messung der Direktionskraft  $D$  nach der Gauss'schen Methode. — II. Messung des mittleren Schwankungsquadrats  $\overline{\varphi^2}$ . A. Photometrische Methode. B. Registrierung der Brownschen Bewegung. — III. Fehlerquellen bei der Messung von  $\varphi^2$ . A. Mechanische Erschütterungen. B. Auftreten neuer Direktionskräfte. Natur der Zusatzdirektionskräfte: a) Radiometerwirkungen, b) Magnetische Direktionskraft. — IV. Absolutmessung. — V. Verbesserungen. — VI. Anhang: Versuche zur Messung der Direktionskraft eines Torsionsfadens nach magnetischer Methode.

---

Nachdem W. Gerlach und Lehrer<sup>2)</sup> in ersten Versuchen das mittlere Schwankungsquadrat einer Drehwaage mit einer Genauigkeit von etwa 7 Proz. gemessen hatten — eine Methode, die zuerst von Smoluchowski<sup>3)</sup> gerechnet wurde — und nachdem die Versuche von Gerlach allein weitergeführt und verbessert wurden, war der Zweck der vorliegenden Arbeit zu untersuchen, inwieweit diese Methode zu einer Messung der Boltzmann'schen Konstanten  $k$  bzw. der Loschmidtschen Zahl  $N_L$  geeignet ist. *Die Methode besteht in der Registrierung der Brownschen Bewegung eines an einem dünnen Quarzfaden von einigen Zentimetern Länge und einigen Zehntel  $\mu$  Dicke hängenden kleinen Spiegels von etwa  $1\text{--}2\text{ mm}^2$  Größe.* Der Zusammenhang des mittleren Schwankungsquadrats  $\overline{\varphi^2}$  mit

---

1) Dissertation der Universität München.

2) W. Gerlach u. E. Lehrer, Naturwiss. **15**. S. 15. 1927; vgl. auch W. Eggers, Ann. d. Phys. [5] **7**. S. 833. 1930.

3) M. v. Smoluchowski, Vorträge über kinetische Theorie der Materie. Göttingen 1914.

der absoluten Temperatur  $T$  und der Direktionskraft  $D$  der Aufhängung ist gegeben durch:

$$(1) \quad D \overline{\varphi}^2 = k T .$$

Die Bestimmung von  $k$  erfordert also eine Messung von  $D$ ,  $\overline{\varphi}^2$  und  $T$ . Die Messung von  $T$  ist naturgemäß kein Problem.

Zur Bestimmung der Direktionskraft nach der Schwingungsgleichung

$$T^2 = 4 \pi^2 \frac{I}{D}$$

kann man grundsätzlich zwei Wege einschlagen: Man umgeht die Messung von  $I$  durch Variation von  $D$  mit Hilfe bekannter Zusatzdirektionskräfte oder man mißt  $I$  durch Variation von  $I$  mit bekannten Zusatzmassen (Gauss'sche Methode). Bei der kleinen Direktionskraft (Größenordnung  $10^{-8}$  bis  $10^{-9}$  abs. Einh.) erwies sich die zweite Methode als leichter und sicherer durchführbar als die erstgenannte, deren systematische Durcharbeitung im Anhang gegeben wird.

#### I. Messung der Direktionskraft $D$ durch Variation von $I$ nach der Gauss'schen Methode

Die Schwingungsdauer des Systems wird bei Belastung mit Körpern von verschiedenem Trägheitsmoment, das aus Gewicht, Größe und Form der betreffenden Körper berechenbar ist, gemessen.

Ist  $I_0$  das Trägheitsmoment des Systems ohne Belastung,  
 $I_m$  „ „ „ „  $m$ ten Körpers,  
 $I_n$  „ „ „ „  $n$ ten Körpers,

so folgt für die Schwingungsdauern  $T_m$ ,  $T_n \dots$  bei ungedämpfter Schwingung

$$(2) \quad \begin{cases} T_m^2 = 4 \pi^2 \frac{I_0 + I_m}{D} , \\ T_n^2 = 4 \pi^2 \frac{I_0 + I_n}{D} . \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$(3) \quad D = 4 \pi^2 \frac{I_m - I_n}{T_m^2 - T_n^2} .$$

Man erkennt, daß in (3) sowohl  $I_n$  als auch das dazugehörige  $T_n$  mit einem größeren Fehler behaftet sein darf, wenn  $I_m$  und  $I_n$  genügend weit auseinanderliegen. Dies ist ein grundsätzlicher Vorzug dieser Methode (vgl. Anhang, S. 255).

Damit der Fehler, der dadurch entsteht, daß die Drehachse des Systems nicht genau mit der Symmetrieachse, für die das Trägheitsmoment berechnet ist, zusammenfällt, möglichst wenig ins Gewicht fällt, benützten wir Stäbchen mit kreiszylindrischem Querschnitt, die aus dünnem Kupferdraht von  $\frac{15}{100}$  mm bis  $\frac{35}{100}$  mm Durchmesser hergestellt wurden. Sie wurden senkrecht zu ihrer Längsachse in der Mitte aufgehängt. Das Gewicht der verschiedenen Stäbchen war ungefähr gleich, um eine eventuelle Abhängigkeit der Direktionskraft des Fadens von der Belastung zu eliminieren. Indessen konnte eine derartige Abhängigkeit nicht bemerkt werden.

Die Schwingungsdauer wurde, um die Dämpfung möglichst klein zu machen — bei Atmosphärendruck befinden sich die Systeme im aperiodischen Schwingungszustand —, im Hochvakuum gemessen (Diffusionspumpe, Kohle in flüssiger Luft, Druck: Größenordnung  $10^{-5}$  mm Hg, mit McLeod gemessen).

Bei der Messung der Schwingungsdauer ergaben sich zunächst einige Schwierigkeiten. Es zeigte sich eine Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude derart, daß ihre Größe bei kleinen Amplituden um einen Mittelwert streute (bis zu 20 Proz.), mit wachsender Amplitude allmählich größer wurde und bei etwa  $180^\circ$  plötzlich sehr stark anwuchs zu einem Werte, der unter Umständen 100 Proz. größer war; bei weiterer Steigerung der Amplitude blieb dieser Wert konstant bei wesentlich geringeren Streuungen. Es lag nahe, zu vermuten, daß die bei großen Amplituden gemessene Schwingungsdauer die richtige war, aber es mußte bewiesen werden. Der bei kleinen Amplituden gemessene kleinere Wert erklärt sich, wenn außer der Torsionskraft noch andere Kräfte im Spiele sind, die die Schwingungsdauer beeinflussen. Einmal sind es unregelmäßig erfolgende Impulse durch Erschütterungen, bei ganz kleinen Amplituden schon durch Brownsche Bewegung. Andererseits sind außer der Direktionskraft des Fadens noch andere Direktionskräfte vorhanden. Diese sind verschiedener Art. 1. Das System ist etwas magnetisch — es kann z. B. mit einem kräftigen Stabmagneten gerichtet werden. 2. Das Licht der Skalenbeleuchtung erzeugte eine starke Richtkraft. Durch systematische Schwächung der Beleuchtung (Ausblenden und Schwächung der Lichtstärke) konnte erreicht werden, daß der bei kleinen Amplituden gemessene Wert allmählich sich

dem bei großen Amplituden gemessenen Wert näherte und ihm fast ganz gleich kam. Allen diesen Richtkräften ist gemeinsam, daß sie ein dem Sinus der Amplitude proportionales Drehmoment erzeugen; und darum wird es verständlich, daß bei größeren Amplituden (über  $180^\circ$ ) nurmehr die Schwingungsdauer gemessen wird, die durch die Direktionskraft des Fadens allein gegeben ist. Es wurde daher immer mit sehr großen Amplituden gearbeitet, auch schon aus der Überlegung heraus, daß die Schwingung durch unregelmäßige Impulse um so weniger gestört wird, je größer die Energie der Schwingung ist.

Es war aber fraglich, ob dann noch das Torsionsmoment des Quarzfadens der Amplitude proportional ist. Nach Angaben der Literatur ist diese Proportionalität bei sehr dünnen Fäden bis zu einigen  $1000^\circ$  befriedigend. Und in der Tat wurde bei unseren Messungen — wir gingen bis zu Amplituden von etwa  $10000^\circ$  — keine systematische Änderung der Schwingungsdauer bemerkt.

Tabelle 1

Stäbchen	Masse g $\cdot 10^3$	Länge cm	Radius cm	$I$ g $\cdot$ cm <sup>2</sup>	$T$	
					Min.	Sek.
1	4,727	0,5455	0,017	$1,169 \cdot 10^{-4}$	13	42
2	4,656	1,074	0,011	$4,475 \cdot 10^{-4}$	26	36
3	4,348	1,944	0,0077	$13,65 \cdot 10^{-4}$	46	56
4	4,856	2,443	0,0074	$24,15 \cdot 10^{-4}$	61	37
5	4,710	3,450	0,0059	$46,73 \cdot 10^{-4}$	86	01

Tabelle 2  
Direktionskraft des Quarzfadens

Stäbchen	1	2	3	4
2	$6,976 \cdot 10^{-9}$			
3	$6,793 \cdot 10^{-9}$	$6,729 \cdot 10^{-9}$		
4	$6,984 \cdot 10^{-9}$	$6,986 \cdot 10^{-9}$	$7,226 \cdot 10^{-9}$	
5	$6,928 \cdot 10^{-9}$	$6,925 \cdot 10^{-9}$	$6,981 \cdot 10^{-9}$	$6,873 \cdot 10^{-9}$

Tab. 1 und 2 enthalten die Ergebnisse der Messung der Direktionskraft eines Fadens, an den fünf verschiedene Stäbchen gehängt wurden. Tab. 1 enthält die Versuchsdaten, Tab. 2 die durch Kombination nach Gl. (3) sich ergebenden Werte für  $D$ . Es fällt auf, daß die mit Stäbchen 3 kombinierten Werte von den anderen Werten stark abweichen. Die genaue Ausmessung dieses Stäbchens ergab eine systematische Änderung der Dicke

längs seiner Länge, und zwar war es in der Mitte um einige Prozent dünner als an den Enden. Dies ist in der Tat die Hauptfehlerquelle, die aber durch vorherige genaue Prüfung der Stäbchen ausgeschaltet werden kann.

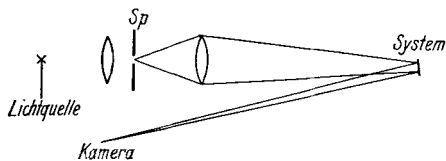
Die Kombination (4, 5) gibt deshalb einen unsicheren Wert, weil die beiden Trägheitsmomente zu nahe beieinanderliegen.

Die Trägheitsmomente 3—5 sind übrigens schon so groß, daß bei ihnen  $D$  direkt aus Gl. (2) gewonnen werden kann, unter Vernachlässigung von  $I_0$ , das von der Größenordnung  $10^{-6}$  abs. Einh. war.

Der Fehler, der durch exzentrische Ankittung entsteht, ist gering. Die längeren Stäbchen (über 1 cm lang) lassen sich unschwer so ankitten, daß die Korrektur, die sich aus dem Steinerschen Satze ergibt, unter 1 Promille bleibt.

## II. Messung des mittleren Schwankungsquadrats $\overline{\varphi^2}$

Mit der Anordnung nach Fig. 1 wird ein Spalt über den Spiegel des Systems auf die photographische Platte bzw. den Film abgebildet.



Schema der Meßanordnung

Fig. 1

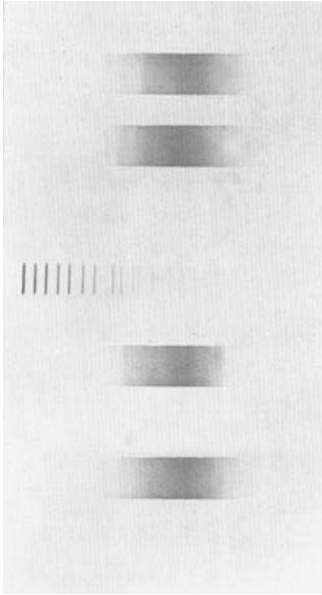
Mit dieser Anordnung wurden nun zwei Methoden ausprobiert: 1. eine photometrische Methode, 2. direkte Registrierung der Schwankungen des Systems.

### A. Photometrische Methode

Das Bild des Spaltes  $Sp$  zeichnet auf einer feststehenden photographischen Platte durch die Schwankungen des Spiegels ein Band kontinuierlicher Schwärzung<sup>1)</sup> (Fig. 2). Photometriert man dieses Band in der Längsrichtung durch, so erhält man

1) Nach einem Vorschlag von S. Goudsmit. Die gleiche Methode ist vorgeschlagen zur Messung von Ausschlägen von Galvanometersystemen, welche Brownsche Bewegung zeigen, von R. Gans, Abh. Königsb. Gel. Ges. 1931, sowie von S. Smith, Phys. Rev. **37**. S. 229. 1931.

direkt die Verteilungsfunktion; das Schwärzungsgesetz der Platte muß durch Drucken von Belichtungsmarken bestimmt werden. Jedoch muß geprüft werden, ob die so gewonnene Verteilungskurve identisch ist mit der die Zeitgesamtheit des



Photometrische Messung der Schwankung bei stillstehender Platte (Methode A)

Fig. 2

Systems darstellenden Verteilungsfunktion, da erstere die mittlere Geschwindigkeit enthält, mit der im Mittel die einzelnen Bereiche  $d\varphi$  durchlaufen werden. Diese mittlere Geschwindigkeit ist aber vom Winkel  $\varphi$  abhängig. Fig. 2 enthält vier Aufnahmen über die Zeitdauer von je 13 Std. mit Belichtungsmarken.

Abgesehen davon, daß durch die Frage, ob die Schwärzung der Platte tatsächlich ein Maß für die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Lagen  $\varphi$  ist (intermittierende Belichtung usw.), vielleicht Schwierigkeiten und prinzipielle Unsicherheiten entstehen, hat diese Methode einen großen Nachteil: Eventuelle, während der Aufnahme eintretende Verlagerungen des Nullpunktes des Systems, die nach unseren Erfahrungen eine Hauptfehlerquelle

darstellen, können entweder gar nicht festgestellt oder höchstens vermutet werden.

Aus diesem Grunde wurde in unseren Messungen nur Methode B angewandt.

### B. Registrierung der Brownschen Bewegung

In Fig. 1 tritt zwischen System und Kamera noch eine Zylinderlinse, die das Spaltbild auf einen Punkt zusammenzieht. Senkrecht zur Bewegungsrichtung dieses Lichtpunktes wird ein Film bzw. Bromsilberpapier vorbeigezogen. Auf diese Weise erhält man die Schwankungskurven der Figg. 4—6. Die Aufnahmen wurden mit einem Edelmannschen Registrierapparat hergestellt, bei welchem mit Hilfe der Zylinderlinse,

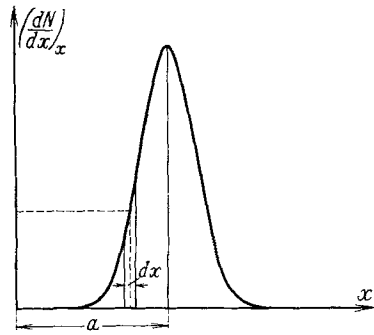
auf der im Abstand von 2 bzw. 1 mm Striche eingeritzt sind, direkt die Bereiche  $dx$  ( $dx = 2 A d\varphi$ ;  $A =$  Abstand Spiegel — Kamera) auf den Film mit abgedruckt werden.<sup>1)</sup>

Die so erhaltene Schwankungskurve wird nun folgendermaßen ausgewertet. Es wird die in jedem Bereich  $x - \frac{dx}{2} \dots, x + \frac{dx}{2}$  liegende Zahl von Durchgängen, die wir mit  $\left(\frac{dN}{dx}\right)_x$  bezeichnen, abgezählt, und zwar so, daß nach jedem Umkehrpunkt ein neuer Durchgang gezählt wird. Die Zahlen  $\left(\frac{dN}{dx}\right)_x$ , die ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an den Stellen  $x$  geben, liefern, als Funktion von  $x$  dargestellt, eine Gauss'sche Verteilung:

$$\left(\frac{dN}{dx}\right)_x = \left(\frac{dN}{dx}\right)_a \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\bar{x}^2}}$$

(vgl. Fig. 3).

$a$  ist die Abszisse der Symmetrielage der Kurve,  $\bar{x}^2$  das mittlere Schwankungsquadrat ( $\bar{x}^2 = 4 A^2 \bar{\varphi}^2$ ).



Theoretische Verteilungskurve

Fig. 3

Um eine von der Beobachtungsdauer unabhängige Form der Verteilungskurve zu erhalten, dividieren wir die Zahlen mit

$$N = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{dN}{dx}\right)_x$$

und erhalten:

$$(4) \quad y = \frac{\left(\frac{dN}{dx}\right)_x}{N} = \frac{\left(\frac{dN}{dx}\right)_a}{N} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\bar{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{x}^2}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\bar{x}^2}}$$

Das mittlere Schwankungsquadrat berechnet sich aus dieser Funktion als:

$$(5) \quad \bar{x}^2 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot (x-a)^2 .$$

1) In Figg. 4—6 an den feinen Unterbrechungen der Kurven zu erkennen.

Die Unbekannte  $a$  bestimmt sich zu:

$$(6) \quad a = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot x .$$

### III. Fehlerquellen bei der Messung von $\overline{\varphi^2}$

Die bei der Messung des mittleren Schwankungsquadrats auftretenden Fehlerquellen lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen:

- A. Vergrößerung von  $\overline{\varphi^2}$  durch unregelmäßig erfolgende äußere Impulse (mechanische Erschütterungen).
- B. Auftreten neuer Direktionskräfte.

#### A. Mechanische Erschütterungen

Störungen dieser Art werden sich den Brownschen Schwankungen einfach überlagern, sie sind in einer Gaußschen Verteilung darstellbar und verbreitern deshalb die Verteilungskurve.

Über den Einfluß mechanischer Erschütterungen geben die Aufnahmen von Schwankungskurven bei verschiedenen Drucken Aufschluß.

Im ganzen liegen zwei Gruppen von Aufnahmen vor; die eine Gruppe ist mit einem Faden von der Direktionskraft  $2,66 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. gemacht (hierbei war die Direktionskraft nur auf etwa 4 Proz. genau bekannt); das Trägheitsmoment des Systems betrug  $6,1 \cdot 10^{-6}$  abs. Einh. (vgl. Fig. 4).

Die zweite Gruppe ist mit einem Faden von der Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. und mit einem System vom Trägheitsmoment von rund  $1 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. ausgeführt. Mit diesem System liegen Aufnahmen vor bei Atmosphärendruck, bei 50 mm, 19 mm,  $2 \cdot 10^{-2}$  mm,  $1 \cdot 10^{-3}$  mm und bei  $1 \cdot 10^{-4}$  mm Hg (vgl. Figg. 5 und 6).

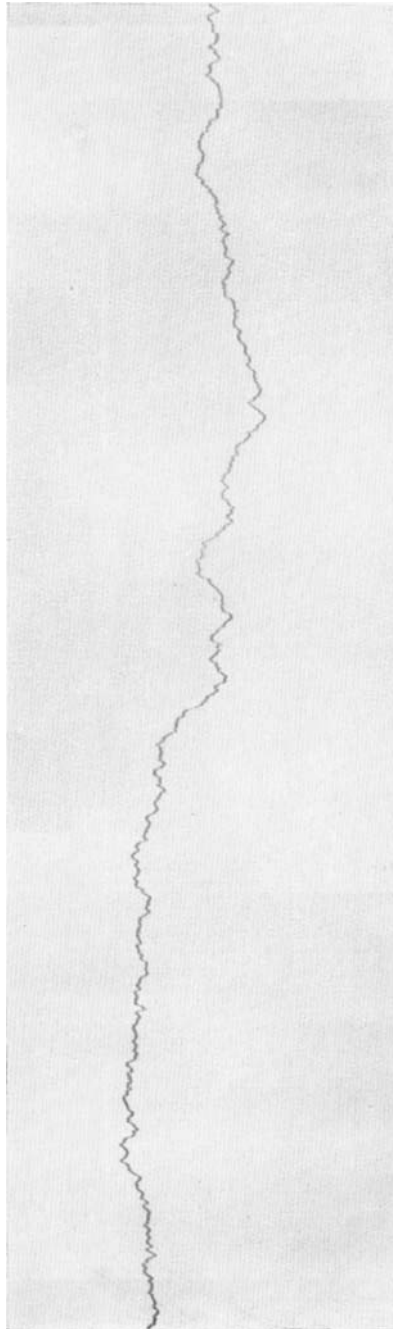
Die Aufnahme bei  $1 \cdot 10^{-4}$  mm Hg ging von 23 Uhr bis 8 Uhr. Die ersten 2 Stunden und die letzten 2 Stunden zeigt sie einen ganz starken Erschütterungseffekt (vgl. Fig. 6b). Auch beim Mittelstück (vgl. Fig. 6a) bestimmt sich  $\overline{\varphi^2}$  um 16 Proz. zu groß. Bei den Aufnahmen bei  $1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg fehlen



die großen Schwankungen bereits ganz (vergleiche Fig. 5b), doch ist  $\overline{\varphi^2}$  immer noch um 9 Proz. zu groß. Dasselbe gilt für die Aufnahme bei  $2 \cdot 10^{-2}$  mm Hg. Stückweise liefern diese Aufnahmen schon mit denen bei hohen Drucken gemachten identische Werte für  $\overline{\varphi^2}$ .

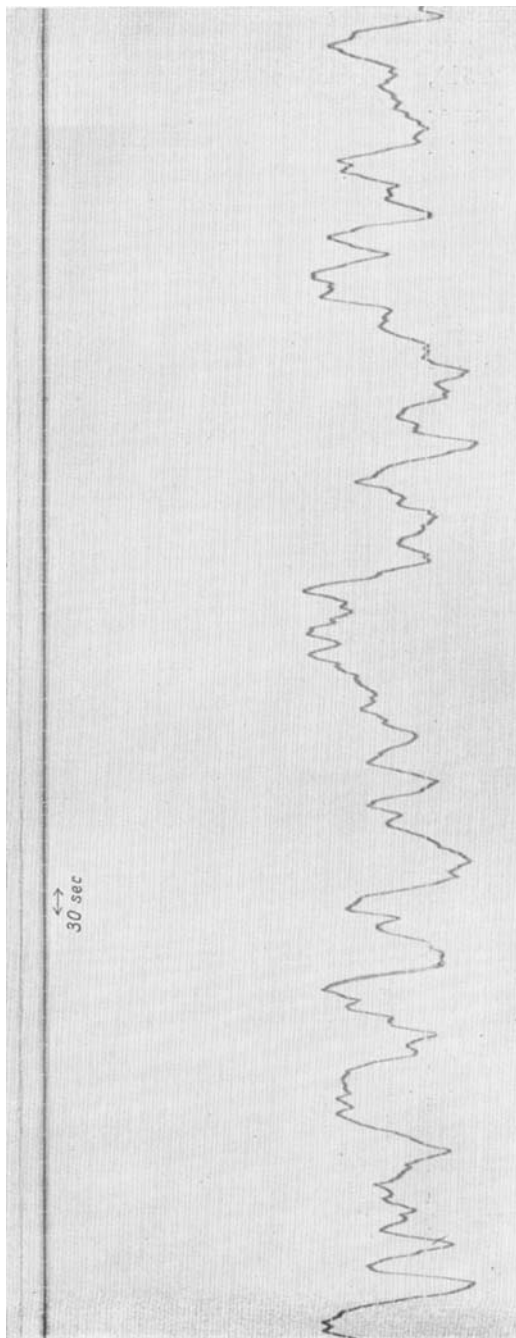
Die bei 19 mm, 50 mm Hg und Atmosphärendruck gemachten Aufnahmen liefern identische Werte für  $\overline{\varphi^2}$  (Tabelle 4).

Es darf somit geschlossen werden, daß mechanische Erschütterungen erst unterhalb 1 mm Druck sich bemerkbar machen und dann um so mehr, je geringer die Dämpfung des Systems wird. Oberhalb 1 mm, wo das System sich bereits im aperiodischen Schwingungszustand befindet, ist deren Einfluß unbedeutend.



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (Methode B) (natürliche Größe).  
 Direktionskraft  $2,66 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment  $6,1 \cdot 10^{-6}$  abs. Einh. Skalenabstand: 86,5 cm.  
 Zeitmarke: 30 sec  $d x = 2$  mm. a) Atmosphärendruck, Temperatur  $15^\circ$  C

Fig. 4a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).  
 Direktionskraft  $2,66 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment  $6,1 \cdot 10^{-6}$  abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera:  $86,5$  cm.  
 Zeitmarke:  $30$  sec  $d r = 2$  mm. b)  $4 \cdot 10^{-3}$  mm Hg. Temperatur  $10^{\circ}$  C

Fig. 4 b



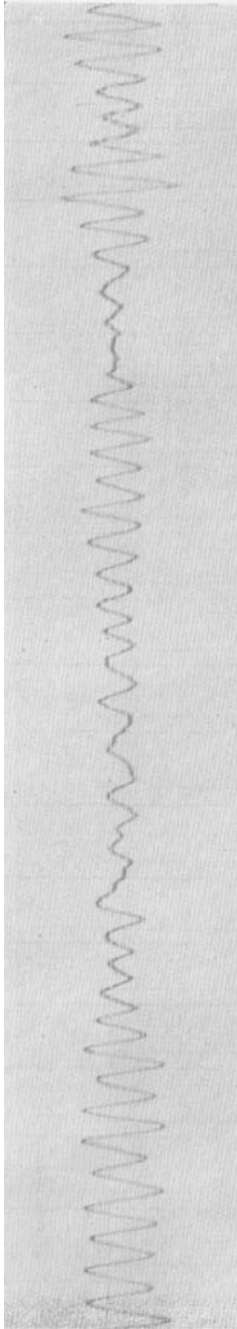
Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).  
 Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment:  $1 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.  
 Zeitmarke: 30 sec  $dx = 1$  mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur  $13^{\circ}$  C

Fig. 5 a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).  
 Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment  $1 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.  
 Zeitmarke: 30 sec  $dx = 1$  mm. b)  $1 \cdot 10^{-3}$  mm Hg. Temperatur  $13^{\circ}$  C

Fig. 5 b



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).

Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment  $1 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.  
 Zeitmarke: 30 sec  $dx = 1$  mm.  $1 \cdot 10^{-4}$  mm Hg. Temperatur  $13^{\circ}$  C. a) Mittelstück

Fig. 6 a

### B. Auftreten neuer Direktionskräfte

Das Auftreten neuer Direktionskräfte bewirkt zweierlei:

1. wird nach Gl. (1)  $\dot{q}^2$  kleiner,

2. aber wird im allgemeinen Falle das Hinzukommen einer neuen Direktionskraft eine Verlagerung des Nullpunktes nach sich ziehen; nur für den speziellen Fall, daß Nullpunkt des Systems, wenn die Zusatzdirektionskraft allein vorhanden wäre, mit dem Nullpunkt des Systems, der durch den Faden allein gegeben ist, übereinstimmen, ist dies nicht der Fall.

Der zweite Effekt ist störender und macht sich schon bei sehr kleinen Zusatzdirektionskräften bemerkbar. Eine Zusatzdirektionskraft von  $\frac{1}{1000} D$  kann bereits eine Nullpunktsverlagerung hervorrufen, die einige Prozent der Gesamtbreite der Verteilungskurve ausmacht.

Nullpunktsverlagerungen haben Verbreiterungen der Verteilungskurve zur Folge; außerdem wird letztere im allgemeinen Falle, wenn die Verlagerungen zeitlich nicht kontinuierlich erfolgten, unsymmetrisch.

Ein strenges Kriterium dafür, ob die verschiedenen Werte von  $a$ , die sich nach Formel (6) für zwei verschiedene Schwingungskurven gleicher Beobachtungsdauer ergeben, bereits

auf eine Nullpunktsverlagerung hinweisen, oder ob sie wegen der beschränkten Beobachtungszeit sich noch so stark unterscheiden dürfen, steht mir bis jetzt noch nicht zur Verfügung.

Die zusätzlichen Direktionskräfte sind zweifacher Natur. Es handelt sich einerseits um Radiometerwirkungen, andererseits um eine magnetische Direktionskraft.

a) *Radiometerwirkungen*

entstehen vor allem durch zufällige Temperaturdifferenzen am Versuchsapparat. Nach Einpacken der Apparatur in Watte — das System ist in der etwa 2—3 mm weiten Bohrung eines zylinderförmigen Kupferblocks von 2 bis 3 cm Durchmesser aufge-



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).  
 Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Trägheitsmoment  $1 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.  
 Zeitmarke: 30 sec  $d x = 1$  mm.  $1 \cdot 10^{-4}$  mm Hg. Temperatur  $13^{\circ}$  C. b) Starke Erschütterung

Fig. 6b

hängt — und nach sorgfältigem Abdichten des Zimmers (die Zimmertemperatur schwankte während der Aufnahmen maximal um  $0,5^{\circ}\text{C}$ ) konnte die Beobachtungsdauer, während der keine Verlagerungen festgestellt werden konnten, von 1 auf 14 Stunden ausgedehnt werden. Schließlich spricht die Beobachtung, daß bei Drucken unterhalb 1 mm Hg Verlagerungen häufiger und in stärkerem Maße auftreten, für radiometrische Störungen.

Zweitens kann die Strahlung des Registrierlichtzeigers am Spiegel einen Radiometereffekt bedingen. Hierüber liegen noch keine systematischen Untersuchungen vor. Als Lampe wurde eine Glühfadenlampe (6 Volt, 3 Watt) verwandt. Ultrarot und langwelliges Rot wurden zur Vorsicht mit einem Filter von wäßriger Kupfersulfatlösung und 10 cm Schichtdicke weitgehend absorbiert. Aus der Tatsache, daß nach Einschalten der Lampe keine beobachtbare Verlagerung der Drehwaage auftritt, darf geschlossen werden, daß ihr Einfluß gering ist, sicherlich so gering, daß er innerhalb der bis jetzt erreichten Genauigkeit liegt.

#### b) *Magnetische Direktionskraft*

Das System besitzt ein kleines magnetisches Moment. Bei der ersten Aufnahmengruppe (Direktionskraft  $2,66 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh.) war das magnetische Erdfeld noch nicht kompensiert. Die Auswertung der Kurven liefert einen rund 30 Proz. kleineren Wert für  $\overline{\varphi^2}$ , als zu erwarten ist.

Bei der zweiten Gruppe (Direktionskraft  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh.) wurde das Erdfeld auf 1 Proz. kompensiert; und es zeigte sich, daß dies durchaus nötig war. Nach Wegnahme der Kompensation trat eine sofortige Verlagerung des Lichtzeigers um etwa 5 cm ein, bei einem Skalenabstand von 72,1 cm, also rund um den Winkel 0,07. Da die Lage des magnetischen Momentes im System nicht bekannt ist, ist aus dieser Beobachtung eine genaue Angabe über die Größe der magnetischen Direktionskraft im Erdfelde nicht möglich; doch kann sie größenordnungsmäßig auf etwa 10 Proz. von der Direktionskraft des Fadens geschätzt werden. Beachtet man, daß bei der ersten Aufnahmengruppe die Direktionskraft rund  $3\frac{1}{2}$  mal kleiner war, so kann die dort gefundene Abweichung von 30 Proz. leicht auf dem Vorhandensein einer magnetischen Direktionskraft beruhen.

## IV. Absolutmessung

Die erste Gruppe von Aufnahmen, an der die Fehlerquellen zuerst studiert wurden, zeigte, daß es vorerst noch keinen Sinn hat, allzu dünne Fäden zu verwenden, um möglichst große Schwankungen zu erzeugen.<sup>1)</sup> Es wurde deshalb bei unserer Absolutmessung ein dickerer Faden gewählt, dessen Direktionskraft mit zwei verschiedenen Zusatzmassen gemessen wurde. Tab. 3 enthält die Ergebnisse.

Tabelle 3

Stäbchen	Länge cm	Radius cm	Masse g	$I$ $\text{g} \cdot \text{cm}^2$	$T$ sec	$D$ $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-2}$
1	1,074	0,0113	$4,735 \cdot 10^{-3}$	$4,552 \cdot 10^{-4}$	1379	$9,443 \cdot 10^{-9}$
2	2,4397	0,016	$3,667 \cdot 10^{-3}$	$1,819 \cdot 10^{-3}$	2762	$9,415 \cdot 10^{-9}$

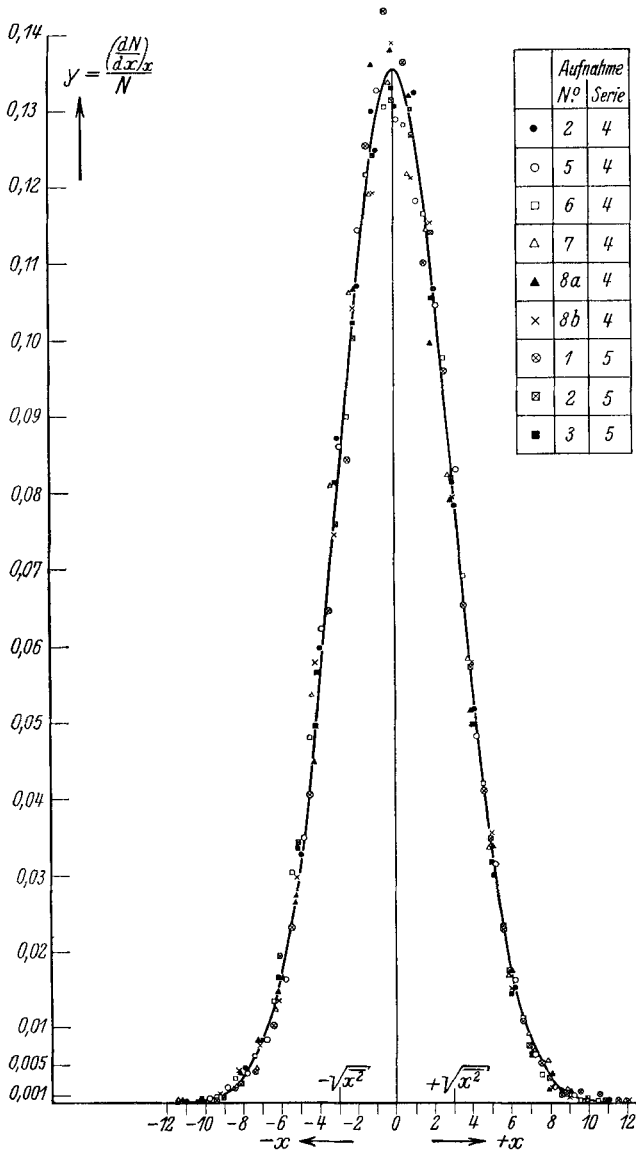
Mittelwerte für  $D$ :  $9,428 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh.; der mittlere Fehler  $\pm 0,2$  Proz. liefert angesichts der Tatsache, daß nur zwei Messungen vorliegen, wahrscheinlich eine zu günstige Beurteilung des Resultats.

Fig. 7 enthält die Werte  $y$  (Gleichung 4) aus neun Aufnahmen von je 7—13 $\frac{1}{2}$  Stunden Beobachtungszeit. Die ausgezogene Kurve stellt die daraus gemittelte Verteilungskurve dar. Tab. 4 enthält die zahlenmäßige Auswertung der einzelnen Kurven; Tab. 5 die Mittelwerte aus allen Kurven.

Tabelle 4

Aufnahme		Druck	Temperatur abs.	Beobachtungs- dauer in Stdn.	$q^2$	$\frac{N_L}{10^{22}}$
Nr.	Serie					
2	4	Atm. Druck	285,9 <sup>0</sup>	12	$4,183 \cdot 10^{-6}$	60,26
5	4	Atm. Druck	286,5 <sup>0</sup>	11,5	$4,147 \cdot 10^{-6}$	60,92
6	4	Atm. Druck	286,7 <sup>0</sup>	9	$4,245 \cdot 10^{-6}$	59,55
7	4	Atm. Druck	287,8 <sup>0</sup>	13,5	$4,229 \cdot 10^{-6}$	60,00
8a	4	Atm. Druck	287,8 <sup>0</sup>	10,5	$4,184 \cdot 10^{-6}$	60,62
8b	4	Atm. Druck	287,8 <sup>0</sup>	7	$4,156 \cdot 10^{-6}$	61,06
1	5	19 mm Hg	286,9 <sup>0</sup>	13	$4,047 \cdot 10^{-6}$	62,56
2	5	19 mm Hg	287,0 <sup>0</sup>	11	$4,236 \cdot 10^{-6}$	59,74
3	5	50 mm Hg	287,6 <sup>0</sup>	13,5	$4,197 \cdot 10^{-6}$	60,42

1) Bei den eingangs genannten Versuchen von W. Gerlach gelang es, so dünne Fäden herzustellen, daß die Brownsche Bewegung bei einem Meter Skalenabstand Schwankungen von mehr als einem Meter lieferte.



Experimentelle Verteilungskurve aus 9 Schwankungsaufnahmen  
von durchschnittlich je 11-stündiger Beobachtungsdauer

Fig. 7



Tabelle 5

Temperatur abs.	Gesamte Beobachtungs- Dauer in Stdn.	$q^2$	$N_L$
287,1°	101	$4,178 \cdot 10^{-6}$	$60,59 \cdot 10^{22}$

Der mittlere Fehler für  $\overline{q^2}$  einer einzelnen Kurve von der durchschnittlichen Beobachtungsdauer von 11 Stunden errechnet sich zu  $\pm 1,4$  Proz.; derjenige des Mittelwerts zu  $\pm 0,4$  Proz.

Der Mittelwert von  $N_L$  ist damit mit einem mittleren Fehler von  $\pm 0,6$  Proz. behaftet. Angesichts der Tatsache, daß nur neun Beobachtungskurven vorliegen, ist das Ergebnis mit einem mittleren Fehler von  $\pm 0,4$  Proz. für  $\overline{q^2}$  wahrscheinlich zu günstig beurteilt. *Immerhin dürfte die Bestimmung der Loschmidtschen Zahl mit dieser Methode auf  $\pm 1$  Proz. erreicht sein.*

#### V. Verbesserungen

Die hier mitgeteilten Untersuchungen berechtigen zu der Hoffnung, daß mit weiterer Vervollkommnung der Apparatur die Fehlergrenze noch wesentlich herabgesetzt werden kann. Die Direktionskraft des Quarzfadens soll mit exakt homogenen Stäbchen, eventuell aus Quarz, noch genauer und sicherer gemessen werden.

Durch Verwendung eines Trägheitsthermostaten und durch weitgehende Abschirmung des magnetischen Erdfeldes, dessen Schwankungen jetzt noch störend sind, wird sich die Beobachtungsdauer, während der keine Verlagerungen stattfinden, sicherlich noch wesentlich steigern lassen. Andererseits wird angestrebt werden, die Apparatur so zu verbessern, daß störungsfreie Aufnahmen auch bei niedersten Drucken durchführbar sind. Wie aus den Figg. 4—6 hervorgeht, reicht bei niederen Drucken schon eine wesentlich kürzere Beobachtungszeit aus, als bei hohen Drucken, um eine sichere Verteilungskurve zu erhalten. Es würden nach unserer Schätzung fortlaufende Registrierkurven von 2—3 Tagen Dauer bereits genügen, um daraus  $\overline{q^2}$  mit maximalen Schwankungen von

wenigen Promille entnehmen zu können, während dazu bei höheren Drucken eine Beobachtungsdauer von einigen Wochen nötig wäre.

### VI. Anhang

Zur Messung der Direktionskraft  $D$  eines Torsionsfadens durch Variation von  $D$  kann man an eine elektrostatische oder an eine magnetische Methode denken. Man könnte auch die Gravitationskraft benutzen, wobei man auch Ablenkungsversuche machen könnte. Denn die zur Beobachtung der Brownschen Bewegung notwendigen Direktionskräfte sind so klein, daß mit verhältnismäßig kleinen Massen leicht Ablenkungswinkel von  $20-30^{\circ}$  erreicht werden.

Es wurde die magnetische Methode probiert, indem man an das System einen kleinen Magneten mit bekanntem magnetischen Moment hing, den man in verschiedenen bekannten Feldern schwingen ließ. Soweit die hierbei gemachten Beobachtungen von allgemeinem Interesse zu sein scheinen, sollen sie im folgenden kurz mitgeteilt werden.

Es sei hier eine allgemeinere Betrachtung eingeschoben über die Schwingung eines Systems, das zwei verschiedenen Direktionskräften unterworfen ist, wobei die Nullage des Systems eine andere ist, je nachdem nur die eine oder nur die andere Direktionskraft vorhanden ist. Die eine Direktionskraft sei die des Quarzfadens, dessen Torsionsmoment proportional dem Ausschlag  $\varphi$  ist; die andere sei eine solche, deren Drehmoment proportional  $\sin \varphi$  ist. Wir beziehen die Gleichungen zunächst auf die Nullage, die das System einnimmt, wenn nur die Direktionskraft des Quarzfadens vorhanden ist, und führen folgende Bezeichnungen ein (Fig. 8):

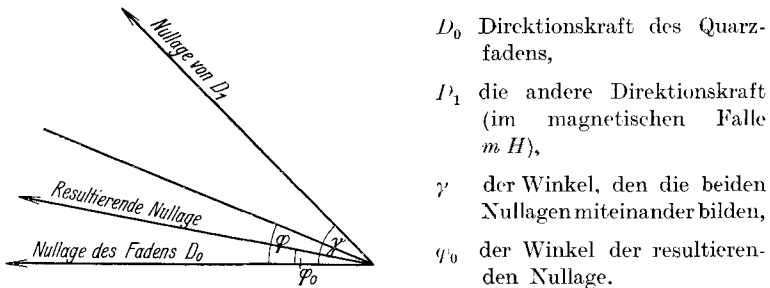


Fig. 8

Diese ist gegeben durch:

$$D_0 \varphi_0 = D_1 \sin(\gamma - \varphi_0) .$$

Beim Ausschlag  $\varphi$  ist das Drehmoment:

$$D_0 \varphi - D_1 \sin(\gamma - \varphi) .$$

Die Schwingungsgleichung des Systems bei ungedämpfter Schwingung ist:

$$\ddot{\varphi} + \frac{D_0}{I} \varphi - \frac{D_1}{I} \sin(\gamma - \varphi) = 0 .$$

Transformieren wir auf die resultierende Nullage und setzen:

$$\varphi = \chi + q_0 ; \quad \ddot{\varphi} = \ddot{\chi} .$$

Dann folgt:

$$\ddot{\chi} + \frac{D_0}{I} (\chi + q_0) - \frac{D_1}{I} \sin \{(\gamma - q_0) - \chi\} = 0 .$$

Für kleine Ausschläge  $\chi$  gilt:

$$\begin{aligned} \sin \{(\gamma - q_0) - \chi\} &= \sin (\gamma - q_0) - \chi \{1 - \sin^2 (\gamma - q_0)\} \\ &= \frac{D_0}{D_1} q_0 - \chi \sqrt{1 - \frac{D_0^2}{D_1^2} q_0^2} , \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$\ddot{\chi} + \frac{D_0}{I} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{D_0^2}{D_1^2} q_0^2} \right\} \chi = 0 .$$

Die Schwingungsdauer ergibt sich zu:

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D_0 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{D_0^2}{D_1^2} q_0^2} \right)} .$$

Für  $q_0 = 0$ , d. h.  $\gamma = 0$  folgt:

$$T'^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D_0 + D_1} .$$

Die Schwingungsdauer ist also geändert, wenn die beiden Direktionskräfte verschiedene Nullpunkte haben. Um einfache Verhältnisse zu erhalten, ist es daher nötig,  $\gamma = 0$  zu machen.

Im magnetischen Falle ist

$$D_1 = mH ,$$

wo  $m$  das magnetische Moment des Magneten,  $H$  die Intensität des Feldes bedeuten. Wir messen die Schwingungsdauer beim Felde  $H_1$  und  $H_2$ . Für  $\gamma = 0$  folgt dann:

$$D_0 = m \frac{H_2 T_2^2 - H_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} .$$

Um aus diesem Ausdruck  $D_0$  mit befriedigender Genauigkeit entnehmen zu können, muß, wie aus einer Fehlerbetrachtung von Differenzen folgt,  $mH$  in der Größenordnung von  $D_0$  liegen. Hier bietet nun das magnetische Erdfeld eine prinzipielle Schwierigkeit. Die kleinsten magnetischen Momente, die hergestellt und gemessen werden konnten, gestatteten höchstens so große Felder zu wählen, die in der Größenordnung des Erdfeldes liegen, um ein genügend kleines  $mH$  zu erhalten. Man muß daher entweder das Erdfeld  $H_0$  sehr genau messen, oder möglichst vollständig kompensieren. Wir kompensierten mit einem Kreisstrom das Erdfeld bis auf ein Restfeld  $H^*$ . Man erhält also aus zwei Schwingungsbeobachtungen in den Feldern  $(H_1 + H^*)$  und  $(H_2 + H^*)$

$$(7) \quad D_0 + mH^* = m \frac{H_2 T_2^2 - H_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2} .$$

$mH^*$  muß also  $\ll D_0$  sein.

Die kleinsten Magnete, die hergestellt wurden, waren etwa 0,3 mm lang, 0,1 mm breit und 0,02 mm dick, ihr magnetisches Moment  $m$  betrug etwa  $2 \cdot 10^{-5}$  abs. Einh., also  $mH_0 = 4 \cdot 10^{-6}$  abs. Einh. Kompensiert man  $H_0$  auf 1 Promille, so wird  $mH^* = 4 \cdot 10^{-9}$  abs. Einh. Es ist also möglich, mit einem solchen Magneten eine Direktionskraft  $D_0 = 4 \cdot 10^{-7}$  abs. Einh. auf 1 Proz. genau zu messen. Das mittlere Schwankungsquadrat eines solchen Systems wäre für  $T = 300^0$  abs.

$$\overline{\varphi^2} = 1,03 \cdot 10^{-7} .$$

Bei 1 m Skalenabstand gibt dies:

$$\sqrt{\overline{x^2}} = 6,42 \cdot 10^{-2} \text{ cm ,}$$

also immerhin noch gut beobachtbare, aber wenig genau meßbare Schwankungen.

#### Messung von $m$

$m$  wurde folgendermaßen gemessen:

Nach der Gaußschen Methode wurde in der 1. Hauptlage  $mH_0$  bestimmt. Der Ausschlag des Magnetometers (als Magnetnadel diente ein Magnet von denselben Dimensionen wie der zu messende, um mit möglichst kleinen Abständen arbeiten zu können) wurde mit einer kleinen Normalspule von bekanntem magnetischen Moment (Länge 0,6412 cm) kompensiert, um  $H_0$  zu eliminieren. Die Vorversuche waren befriedigend genau; Tab. 6 enthält eine Meßreihe für  $m$ .

Tabelle 6

Abstand: Spule—Magnetometer in cm	Abstand: Magnet—Magnetometer in cm	$m$
5,994	0,3046	6,29
	0,3139	6,34
	0,3683	6,34
	0,4320	6,28
		} $\cdot 10^{-5}$ abs. Einh.

Die Felder  $H_1$  und  $H_2$  wurden mit Hilfe einer Normalspule von rund 26 cm Länge, 3,5 cm Durchmesser, 375 Windungen erzeugt und aus den Dimensionen der Spule und der Stromstärke berechnet.

Der Magnet befand sich in der Mittelebene der Spule, ungefähr 6—7 cm von der Längsachse der Spule entfernt.

Nun schwankt aber im hiesigen Institut das Erdfeld selbst bei Nacht beträchtlich, bei Nacht um etliche Promille, bei Tag sogar um einige Prozent, so daß diese Methode die oben angegebene Genauigkeit nicht leisten kann. Von dem Wunsche geleitet, vor allem auch noch kleinere Direktionskräfte messen zu können, gingen wir, um das magnetische Moment des Systems noch mehr zu verkleinern, zu einem astatischen System aus zwei Magneten von der erwähnten Größenordnung über. Das Erdfeld wurde kompensiert.

Es sei gleich auf einen Nachteil dieser Methode hingewiesen, der darin besteht, daß nunmehr das magnetische Moment des Systems, das

sich im wesentlichen aus der algebraischen Differenz (genauer der geometrischen Differenz) der magnetischen Momente der einzelnen Magnete zusammensetzt, nicht mehr genau meßbar ist.

Bei den Versuchen mit astatischen Systemen wurden nun zwei merkwürdige Beobachtungen gemacht, die uns veranlaßten, etwas eingehender das Verhalten astatischer Systeme zu studieren.

Die Versuchsanordnung war folgende (vgl. Fig. 9):

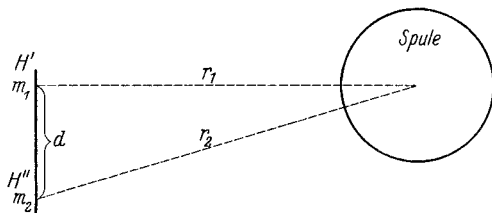


Fig. 9

Das System befand sich in der Mittelebene der Spule so, daß der Magnet  $m_1$  mit der Spule in gleicher Höhe war und die Entfernung  $r_1$  (6 bis 7 cm) hatte;  $r_2$  kann dann aus  $r_1$  und dem Abstand  $d$  der beiden Magnete berechnet werden.

Die erste Beobachtung war folgende: Einerseits nahm das astatische System im Erdfeld eine Stellung ein, die mit der Stellung des Systems mit nur einem Magneten einen ziemlich großen Winkel bildete. Stand andererseits die Spule mit ihrer Längsachse parallel dem Erdfeld, so drehte sich das System mit wachsender Stromstärke bis zu einem bestimmten Grenzwinkel, der ebenfalls ziemlich groß war, aus der Nullage heraus. Umgekehrt mußte man, um bei einer bestimmten Stromstärke keinen Ausschlag zu erhalten, die Spule um einen bestimmten Winkel gegen das Erdfeld drehen.

Die zweite Erscheinung war, daß bei kompensiertem Erdfeld keine Stellung der Spule gefunden werden konnte, bei der das System bei jeder Stromstärke in Ruhe blieb.

Und zwar war die Abhängigkeit der Lage des Systems von der Stromstärke eine solche, daß das System mit wachsender Stromstärke sich zuerst nach der einen Seite drehte, bei einer bestimmten Stromstärke wieder umkehrte, wieder durch die Nullage ging, um dann nach der anderen Seite zu wandern bis zu einem bestimmten Grenzwinkel (vgl. Fig. 10).

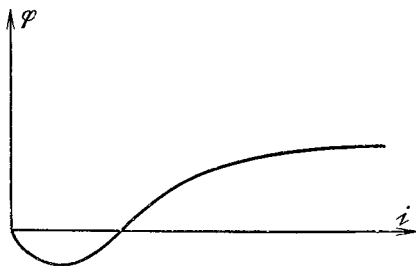


Fig. 10

Die erste Erscheinung zeigt das ganz normale Verhalten eines astatischen Systems, das dem Idealfall völliger Astasie nur mit bestimmter Grenze nahekommt. Die Fehler eines astatischen Systems bestehen erstens in der Tatsache  $m_1 \neq m_2$ , zweitens in dem Umstand, daß die Momente einen kleinen Winkel  $\delta$  miteinander bilden; letztere Tatsache ist besonders von Bedeutung.

Wir berechnen zuerst die Gleichgewichtslage eines solchen Systems bei ausgeschaltetem Erdfeld und bei Vernachlässigung der Aufhängung unter Wirkung der beiden parallelen Felder  $H'$  und  $H''$  unserer Spule (vgl. Fig. 11).

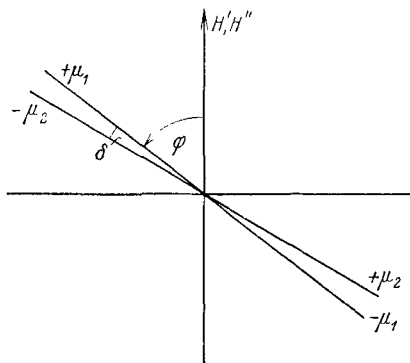


Fig. 11

Der Winkel  $\varphi$  ist der Winkel, den  $m_1$  mit der Feldrichtung  $H'$  bzw.  $H''$  bildet.

Auf  $m_2$  wirkt das Drehmoment:  $D_1 = m_1 H' \sin \varphi$ , auf  $m_2$ :  $D_2 = m_2 H'' \sin(180^\circ + \varphi + \delta)$ . Gleichgewicht herrscht für  $D_1 + D_2 = 0$ . Daraus folgt für die Gleichgewichtslage  $\varphi$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{m_2 H'' \sin \delta}{m_1 H' - m_2 H'' \cos \delta}.$$

Setzen wir  $\frac{m_2}{m_1} = a$ ,  $\frac{H''}{H'} = b$ , so folgt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \cdot b \cdot \sin \delta}{1 - a \cdot b \cdot \cos \delta}.$$

Im Falle eines homogenen Feldes ( $b = 1$ ) und völlig gleicher Magnete ( $a = 1$ ) folgt:

$$\varphi = 90^\circ - \frac{\delta}{2},$$

d. h. das System stellt sich senkrecht zum homogenen Felde ein.

Für bestimmte Werte von  $a$ ,  $b$  und  $\delta$  kann jeder Winkel zwischen  $0$  und  $90^\circ$  vorkommen.

Hat man nun dafür Sorge getragen, daß Nullage des Fadens und Nullage des Erdfeldes und Nullage des nach Kompensation des Erdfeldes noch vorhandenen Restfeldes übereinstimmt, so bleibt die zweite Erscheinung unverständlich.

Sind die eben erwähnten Bedingungen nicht erfüllt, so folgt, wie man durch eine ähnliche Rechnung zeigen kann, zwar eine Abhängigkeit der Gleichgewichtslage  $\varphi$  von der Stromstärke  $i$ , aber nur eine von folgender Art:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a' i + b'}{a'' i + b''},$$

d. h.  $\operatorname{tg} \varphi$  ist eine monotone Funktion von  $i$ .

Die zweite Erscheinung findet ihre Erklärung durch die Annahme, daß die beiden Magnete des Systems durch die Felder  $H'$  und  $H''$  verschieden magnetisiert werden.

Durch den Ansatz

$$m_1 = m_{10}(1 + c_1 i)$$

$$m_2 = m_{20}(1 + c_2 i)$$

erhält man für  $\operatorname{tg} \varphi$  eine Funktion von folgender Form:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a' i^2 + b' i + c'}{a'' i^2 + b'' i + c''},$$

die eine Abhängigkeit, wie sie in Fig. 10 gezeichnet ist, liefern kann.

Für diese Erklärung spricht auch noch folgende Beobachtung, die bei sehr empfindlicher Aufhängung gemacht wurde, wo selbst nach Kompensation des Erdfeldes die Direktionskraft des Restfeldes mit der des Fadens noch vergleichbar war: Hat man die Spule so gedreht, daß bei bestimmter Stromstärke das System in der Nullage verblieb und schaltete man dann aus, so drehte sich das System aus der Nullage heraus, um nach einiger Zeit wieder zurückzukehren. Durch die Felder  $H'$ ,  $H''$  haben sich die Konstanten des Systems geändert, und zwar kann sich nur die Konstante  $a$  geändert haben.

Alle diese Beobachtungen wurden bei empfindlicher Aufhängung gemacht, wo  $mH$  ( $m$  ist hier das resultierende Moment des astatischen Systems) für eine Messung von  $D$  noch zu groß war. Stehen  $mH$  und  $D$  in geeignetem Verhältnis zueinander, so treten diese Beobachtungen in geringerem Maße in Erscheinung. Die Änderung des Gesamtmomentes durch verschiedene Magnetisierung bleibt aber natürlich bestehen. Die Werte, die für  $D_0$  aus der Gleichung:

$$D_0 + mH^* = C' \cdot \frac{i_2 T_2^2 - i_1 T_1^2}{T_1^2 - T_2^2}$$

folgten, streuten bis zu 12 Proz.

Es ist auch nach sonstigen Angaben über die Größe der Magnetisierungskonstanten  $c$  eine Änderung des Gesamtmomentes bei den von uns benützten Feldern bis zu 10 Proz. durchaus wahrscheinlich gemacht.

Die Tatsache, daß das Moment des astatischen Systems durch verschiedene Magnetisierung der einzelnen Magnete sich sehr stark ändert, macht diese Methode unbrauchbar.

Ein Vergleich der Gl. (3) und (7) läßt einen grundsätzlichen Vorzug der Gauss'schen Methode vor der eben besprochenen erkennen. Während in Gl. (7) immer entweder das Feld  $H$  oder die dazugehörige Schwingungsdauer  $T$  genau bekannt sein müssen, darf in Gl. (3) sowohl  $I_n$  als auch  $T_n$  mit einem größeren Fehler behaftet sein. In Gl. (7) wird das kleinere Feld  $H_1$  dadurch ungenau, daß die Schwankungen des Restfeldes sich schon bemerkbar machen, wodurch natürlich auch die Schwingungsdauer  $T_1$  ungenau wird. In Gl. (3) wirken sich die Fehler, die durch unsymmetrisches Ankitten entstehen, am meisten bei den kleinen Trägheitsmomenten aus; das schadet aber nichts, da die ihnen zugeordnete Schwingungsdauer auch nicht so genau bekannt zu sein braucht.

Ferner ist die Beobachtung, daß die exakte Messung der Schwingungsdauer bei kleinen Amplituden sehr großen Schwierigkeiten begegnet, ein weiterer Grund, warum jede Methode von der Art, wie die im Anhang behandelte, zur Messung kleiner Direktionskräfte versagen muß.

#### **Zusammenfassung**

Aus der Brownschen Bewegung einer Drehwaage wird eine Messung der Loschmidtschen Zahl  $N_L$  durchgeführt.  $N_L$  bestimmt sich aus 9 Schwankungsaufnahmen von insgesamt 101 Stunden Beobachtungsdauer zu  $60,59 \cdot 10^{22} \pm 1$  Proz.

Zur Messung der Direktionskraft des Quarzfadens (Größenordnung  $10^{-9}$  abs. Einh.) wurde die Gausssche Methode mit Erfolg angewandt. Eine magnetische Methode, bei der bei gleichem Trägheitsmoment die Direktionskraft variiert wurde, führte nicht zum Ziel.

Erschütterungen machen sich erst unterhalb 1 mm Druck bemerkbar. Die Hauptfehlerquelle besteht im Auftreten variabler Zusatzdirektionskräfte (Radiometerwirkungen, magnetische Direktionskraft); die Versuche berechtigen zur Hoffnung, daß deren Einfluß noch wesentlich vermindert werden kann.

Hrn. Professor Dr. W. Gerlach bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes, förderndes Interesse zu tiefstem Dank verpflichtet. Hr. Professor Rüchardt danke ich für sein großes Interesse während des Verlaufes der Untersuchungen. Besonderer Dank gebührt Hr. Privatdozent Dr. Schütz, dem ich viele wertvolle Besprechungen und Ratschläge verdanke. Von den gebrauchten Hilfsmitteln stammt die Edelmannsche Registriervorrichtung, die Hochvakuumpumpe, sowie das photographische Material von der Helmholtz-Gesellschaft, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

München, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 27. Juni 1931)