**Formation Interuniversitaire de Physique, L3**

Année 2016-2017

# Mathématiques pour physiciens

## Examen: 17/01/2017

ATTENTION: les exercices ne sont pas en ordre croissant de difficulté; ils sont ordonnés par sujet traité pendant le cours.

1. Calculer à l'aide du théorème des résidus les intégrales suivantes

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \int_0^\infty dx \frac{\cos ax}{9x^4+10x^2+1} \quad , \qquad a \in \mathbb{R} \\
&b) \quad \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(2+x)} \\
&c) \quad \int_0^\infty dx \frac{4x}{x^3+27}
\end{aligned}
$$

2. Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $P(1/x)$ et $\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2})$ les distributions définies comme

$$
\begin{aligned}
\langle P(\frac{1}{x}), h\rangle &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \mathrm{d}x \frac{h(x)}{x} \\
\langle \mathrm{fp}(\frac{1}{x^2}), h\rangle &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} \mathrm{d}x \frac{h(x)-h(0)}{x^2} \,.
\end{aligned}
$$

*a*) Montrer que

$$\frac{d}{dx} P(\frac{1}{x}) = -\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2})$$

*b*) Calculer au sens de distributions

$$\frac{d}{dx}(x \ln|x|) \qquad \frac{d^2}{dx^2} \ln|x|$$

3. Utiliser la transformée de Fourier pour prouver la relation

$$\int_0^\infty dx \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} \frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{8} \int_0^\infty dk\, e^{-\frac{a^2k^2}{2}-k} (\cos k + \sin k)$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

4. On considère une variable aléatoire $X$ avec densité de probabilité $p_X(x) = e^{-x}\theta(x)$, et une deuxième variable $Y = 2\ln X$. Trouver la densité de probabilité $p_Y(y)$, la fonction de répartition $F_Y(y)$, et la médiane de $Y$ (la valeur $y_m$ telle que la probabilité que $Y > y_m$ est 1/2).

5. Trouver les solutions fondamentales des équations

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) = 0 \\ b) \quad & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a\right)^3 y(x) = 0 \end{aligned}$$

6. Soit l'équation de Bessel modifiée

$$zy''(z) + y'(z) - \left(z + \frac{\nu^2}{z}\right) y(z) = 0\,.$$

avec $\nu \in \mathbb{R}$

a) Quels sont les points singuliers et de quel type sont ils?
b) Calculer par série les solutions de l'équation autour de $z = 0$ pour $\nu \notin \frac{1}{2}\mathbb{N}$, en donnant explicitement les coefficients $c_n$ de la solution.
c) Étudier en détail le cas où $\nu = \frac{1}{2}$: calculer les $c_n$ et sommer la série.