Mathématiques pour physiciens

Examen: 17/01/2017 Solution

ATTENTION: les exercices ne sont pas en ordre croissant de difficulté; ils sont ordonnés par sujet traité pendant le cours.

1. **Calculer à l'aide du théorème des résidus les intégrales suivantes**

$$
\begin{aligned}
a) \quad & \int_0^\infty dx \frac{\cos ax}{9x^4+10x^2+1} \quad , \qquad a \in \mathbb{R} \\
b) \quad & \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(2+x)} \\
c) \quad & \int_0^\infty dx \frac{4x}{x^3+27}
\end{aligned}
$$

$a)$ La fonction intégrande est paire. Donc on peut récrire l'intégrale comme

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^\infty dx \frac{\cos ax}{9x^4+10x^2+1} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx \frac{\cos ax}{9x^4+10x^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty dx \frac{e^{iax}}{9x^4+10x^2+1} \, .
\end{aligned}
$$

La fonction

$$
f(z) = \frac{e^{iax}}{9z^4+10z^2+1} = \frac{e^{iaz}}{(z+i)(z-i)(3z+i)(3z-i)}
$$

a quatre pôles simples en $z \pm i$ et $z = \pm\frac{i}{3}$ avec résidu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f, \pm i] &= \left.\frac{e^{iaz}}{36z^3+20z}\right|_{z=\pm i} = \pm\frac{i}{16}e^{\mp a} \\
\mathrm{Res}[f, \pm\frac{i}{3}] &= \left.\frac{e^{iaz}}{36z^3+20z}\right|_{z=\pm i/3} = \mp\frac{3i}{16}e^{\mp a/3} \, .
\end{aligned}
$$

On applique le théorème des résidus au contour $\Gamma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$ où le choix du demi-cercle γ_R dépend du signe du paramètre a pour le deuxième Lemme de Jordan: pour $a > 0$ γ_R est dans le demi-plan supérieure et pour $a < 0$ dans le demi-plan inférieure.

– $a > 0$. Le contour Γ_R contient les pôles $z = i$ and $z = 3i$. Le théorème des résidus donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos ax}{9x^4 + 10x^2 + 1} = 2\pi i(\mathrm{Res}[f, i] + \mathrm{Res}[f, \frac{i}{3}]) = -\frac{\pi}{8} e^{-a} \left(1 - 3e^{2a/3}\right) .$$

– $a < 0$. Le contour Γ_R contient les pôles $z = -i$ and $z = -3i$. Le théorème des résidus donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos ax}{9x^4 + 10x^2 + 1} = -2\pi i(\mathrm{Res}[f, -i] + \mathrm{Res}[f, -3i]) = -\frac{\pi}{8} e^{a} \left(1 - 3e^{2a/3}\right) .$$

Donc l'intégrale I vaut

$$I = -\frac{\pi}{16} e^{-|a|} \left(1 - 3e^{2|a|/3}\right) .$$

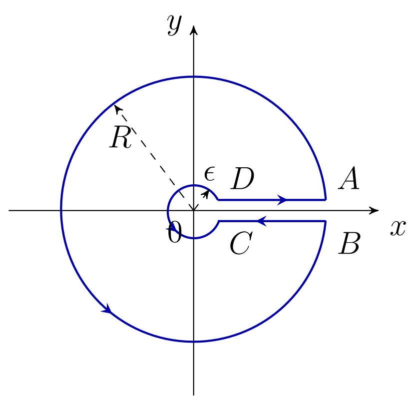
$b)$ La fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^{1/4}(2 + z)}$$

a un point de branchement en $z = 0$. On choisit la détermination principale de la racine avec coupure sur l'axe des réels positifs $z^{1/4} = r^{1/4} e^{i\theta/4}$ avec $z = re^{i\theta}$ et $\theta \in (0, 2\pi)$. Dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}^+$ $f(z)$ a un pôle simple en $z = -2 = e^{i\pi}$ avec résidu

$$\mathrm{Res}[f, 1] = 2^{-1/4} e^{-i\pi/4} .$$

On choisit le contour ci-dessous.



Le théorème des résidus donne

$$I_R = \oint_{\Gamma_R} dz \frac{1}{z^{1/4}(1+z)} = 2\pi i (2^{-1/4} e^{-i\pi/4}) = 2^{1/4}(1+i)\pi$$

On évalue directement l'intégrale sur $\Gamma_R = \gamma_R + BC + \gamma_\epsilon + DA$. L'integrale sur le circle γ_R s'annule pour $R \to \infty$ par le premier lemme de Jordan. L'intégrale sur le circle de rayon ϵ s'annule aussi pour $\epsilon \to 0$. Si on pose $z = \epsilon e^{i\theta}$ on a

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_\epsilon} dz \frac{1}{z^{1/4}(2+z)} &= i \int_{2\pi}^{0} d\theta \frac{\epsilon^{3/4} e^{-i\theta/4}}{2 + \epsilon e^{i\theta}} \\ &\underset{\epsilon \to 0}{\sim} \frac{i}{2} \epsilon^{3/4} \int_{2\pi}^{0} d\theta \, e^{-i\theta/4} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0 \end{aligned} \tag{0.0.1}$$

Pour $R \to \infty$ et $\epsilon \to 0$ on a

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{DA} dz \frac{1}{z^{1/4}(2+z)} + \int_{BC} dz \frac{1}{z^{1/4}(2+z)} \\ &\to \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(2+x)} - e^{-i\pi/2} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(2+x)} \\ &= (1+i) \int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(2+x)} , \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que, pour $\epsilon \to 0$, sur DA la phase de z tend vers 0 sur DA et 2π sur CB. Comparant les deux résultats pour I_R on trouve

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{x^{1/4}(1+x)} = \frac{2^{1/4}(1+i)\pi}{(1+i)} = 2^{1/4}\pi$$

c) Comme la fonction intégrande est impaire, on ne peut pas transformer l'intégrale dans une intégrale sur tout l'axe réel. La fonction

$$f(z) = \frac{4z}{z^3 + 27}$$

a trois pôles simples en $z_k = 3e^{i\frac{\pi}{3} + i\frac{2k\pi}{3}}$ avec $k = 0, 1, 2$. Dans ce cas pour appliquer le théorème des résidus on choisit un contour $\Gamma_R = \sum_{i=1}^{3} \gamma_i$, avec

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{z = x \, , \, x \in [0, R]\} \, , \\ \gamma_2 &= \{z = Re^{i\theta} \, , \, \theta \in [0, \frac{2\pi}{3}]\} \, , \end{aligned}$$

$$\gamma_3 = \{z = re^{i\frac{2\pi}{3}}, r \in [R,0]\}\,, \tag{0.0.2}$$

qui contient seulement le pôle $z_0 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Le théorème des résidus donne

$$\begin{aligned} I_R &= \oint_{\Gamma_R} dz \frac{4z}{z^3+27} = 2\pi i \mathrm{Res}[f, z_0] \\ &= 2\pi i \left.\frac{4z}{3z^2}\right|_{z_0} = -\frac{8\pi i}{9} e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{aligned}$$

Si on évalue directement l'integrale I_R, la contribution de l'intégrale sur γ_2 s'annule pour $R \to \infty$ et on a

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{\gamma_1} dz \frac{4z}{z^3+27} + \int_{\gamma_3} dz \frac{4z}{z^3+27} \\ &= \int_0^R dx \frac{4x}{x^3+27} - e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^R dr \frac{3r}{r^3+27} \\ &\underset{R\to\infty}{\to} (1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}) \int_0^R dx \frac{4x}{x^3+27}\,. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions pour I_R on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^R dx \frac{4x}{x^3+27} &= -\frac{8\pi i}{9} e^{\frac{2\pi i}{3}} (1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})^{-1} \\ &= \frac{4\pi}{9} (\sin\frac{2\pi}{3})^{-1} = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. **Soit $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $P(1/x)$ et $\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2})$ les distributions définies comme**

$$\begin{aligned} \langle P(\frac{1}{x}), h\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>\epsilon} \mathrm{d}x \frac{h(x)}{x} \\ \langle \mathrm{fp}(\frac{1}{x^2}), h\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{|x|>\epsilon} \mathrm{d}x \frac{h(x)-h(0)}{x^2}\,. \end{aligned}$$

   a) **Montrer que**

$$\frac{d}{dx} P(\frac{1}{x}) = -\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2})$$

   b) **Calculer au sens de distributions**

$$\frac{d}{dx}(x \ln|x|) \qquad \frac{d^2}{dx^2} \ln|x|$$

On utilise la définition de dérivée d'une distribution

$$T^{(n)}(h) = (-1)^n T(h^{(n)}) \, ,$$

avec $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

a) On utilise la définition ci-dessus on a

$$\frac{d}{dx} P(\frac{1}{x}) = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} dx \frac{h'(x)}{x}$$

et on intègre par parties

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[- \left. \frac{h(x)}{x} \right|_{-\infty}^{-\epsilon} - \left. \frac{h(x)}{x} \right|_{\epsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{h(x)}{x^2} - \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{h(x)}{x^2} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{h(-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{h(\epsilon)}{\epsilon} \right] - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} dx \frac{h(x)}{x^2} \, . \end{aligned}$$

Dévéloppant h autour de $x = 0$, le terme en parenthèse peut être reécrit comme

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{h(-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{h(\epsilon)}{\epsilon} \right] &= \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (h(0) - h'(0)\epsilon + \frac{1}{2} h''(0)\epsilon^2 + \ldots) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\epsilon} (h(0) + h'(0)\epsilon + \frac{1}{2} h''(0)\epsilon^2 + \ldots) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2h(0)}{\epsilon} + O(\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} dx \frac{h(0)}{x^2} \, . \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{d}{dx} P(\frac{1}{x}) = - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x|>\epsilon} dx \frac{h(x) - h(0)}{x^2} = -\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2}) \, .$$

b) La fonction $\ln |x|$ est localement integrable en $x = 0$ et donc on y associe une distribution regulière. La dérivée au sens des distributions est

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} T_{\ln |x|}(h) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln |x| h'(x) \\ &= - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} dx \ln |x| h'(x) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} [\ln \epsilon \, (h(\epsilon) - h(-\epsilon))] + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| \geq \epsilon} dx \frac{1}{x} h(x) \end{aligned}$$

Le terme de bords s'annule car, en dévéloppant ϕ en 0 on a

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\ln\epsilon\,(\phi(\epsilon)-\phi(-\epsilon))] = \lim_{\epsilon\to 0}[\ln\epsilon\,(\epsilon\phi'(0)+O(\epsilon^3)] = 0$$

et donc

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = P\frac{1}{x}\,.$$

Utilisant le résultat en a) on a

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln|x| = -\mathrm{fp}(\frac{1}{x^2})\,.$$

Pour calculer $\frac{d}{dx}(x\ln|x|)$ peut utiliser la propriété suivante

$$(gT)' = g'T + gT'$$

où $g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Dans ce cas $g = x$ et

$$\frac{d}{dx}(x\ln|x|) = \ln|x| + x\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \ln|x| + xP\frac{1}{x}$$

On a aussi

$$xP\frac{1}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|\geq\epsilon} dxx\frac{1}{x}h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dxh(x) = 1\,.$$

et donc

$$\frac{d}{dx}(x\ln|x|) = \ln|x| + 1\,.$$

3. **Utiliser la transformée de Fourier pour prouver la relation**

$$\int_0^\infty dx\frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}}\frac{1}{4+x^4} = \frac{1}{8}\int_0^\infty dk\, e^{-\frac{a^2k^2}{2}-k}(\cos k + \sin k)$$

avec $a\in\mathbb{R}$**.**

Les fonctions

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} \qquad\qquad g(x) = \frac{1}{4+x^4}$$

sont en $L^1(\mathbb{R})$. Si on appelle $\hat{f}$ et $\hat{g}$ leur transformées de Fourier on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} dxf(x)g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\hat{f}(k)\hat{g}(k)\,.$$

La partie de gauche de cette équation peut s'écrire comme

$$\int_{\infty}^{\infty} dx f(x)g(x) = 2\int_{0}^{\infty} dx \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} \frac{1}{4+x^4}\,.$$

On doit calculer $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Pour $\hat{f}$ on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}} \\
&= \frac{e^{a^2k^2/2}}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{a}+ika)^2} dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\, e^{-a^2k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2k^2/2}\,.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\hat{g}$

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{4+x^4}$$

on applique le théorème des résidus. La fonction $g(z)$ a quatre pôles simples en

$$z_l = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{l\pi}{2}} \qquad l = 0, \ldots, 3\,.$$

Comme la fonction $g(z)$ est paire, sa transformée de Fourier l'est aussi et on peut considérer seulement le cas $k > 0$. Pour le deuxième lemme de Jourdan, on prend le contour Γ_R dans le demi-plan $\mathrm{Im} z < 0$. Donc seules les pôles z_2 et z_3 contribuent

$$\begin{aligned}
\hat{g}(k) &= -\sqrt{2\pi} i (\mathrm{Res}[e^{-ikx} g, z_2] + \mathrm{Res}[e^{-ikx} g, z_3]) \\
&= -\frac{\sqrt{\pi} i}{8} e^{i\frac{\pi}{4}} (e^{-(1-i)k} + i e^{-(1+i)k}) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} e^{-k} (\cos k + \sin k)
\end{aligned}$$

où on a utilisé Les résidus de $e^{-ikz} g(z)$ en z_l sont

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[e^{-ikx} g, z_2] &= \frac{1}{8\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-(1-i)k} \\
\mathrm{Res}[e^{-ikx} g, z_3] &= \frac{i}{8\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-(1+i)k}
\end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dk\hat{f}(k)\hat{g}(k) &= 2\int_0^{\infty} dk\hat{f}(k)\hat{g}(k) \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} dke^{-a^2k^2/2}e^{-k}(\cos k+\sin k)\end{aligned}$$

et on voit que l'identité est vérifiée.

4. On considère une variable aléatoire X avec densité de probabilité $p_X(x){=}e^{-x}\theta(x)$, et une deuxième variable $Y = 2\ln X$. Trouver la densité de probabilité $p_Y(y)$, la fonction de répartition $F_Y(y)$, et la médiane de Y (la valeur y_m telle que la probabilité que $Y > y_m$ est $1/2$).

5. **Trouver les solutions fondamentales des équations**

$$\begin{aligned} a)\quad & \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + ay(x) = 0 \\ b)\quad & \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a\right)^3 y(x) = 0\end{aligned}$$

a) La solution fondamentale $G(x-y)$ est la solution de l'equation

$$\frac{\mathrm{d}G(x,y)}{\mathrm{d}x} + aG(x,y) = \delta(x-y)\,.$$

Dans les deux régions $x > y$ et $x < y$ la solution coïncide avec la solution de l'équation homogène

$$G(x,y) = \begin{cases} c_+(y)e^{-ax} & x > y \\ c_-(y)e^{-ax} & x < y \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\lim_{x\to y_+} G(x,y) = \lim_{x\to y_-} G(x,y) + 1\,,$$

qui reflètent le fait que la dérivée de G donne $\delta(x-y)$. La condition au bord fixe A

$$c_+(y)e^{-ay} = c_-(y)e^{-ay} + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c_+(y) = c_-(y) + e^{ay}\,,$$

et la solution fondamentale a la forme

$$G(x,y) = c_-(y)e^{-ax} + \theta(x-y)e^{-a(x-y)}\,.$$

b) On commence à déterminer la solution de l'équation homogène

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a\right)^3 y(x) = (\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}+3a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+3a^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a^3)y(x)=0\,.$$

En posant $y(x)=e^{\lambda x}$ on obtient l'équation caractéristique

$$(\lambda+a^3)=0$$

qui a solution $\lambda=-a$ avec mutliplicité 3. Donc une solution est donnée par

$$y_1(x)=e^{-ax}$$

et on peut facilement vérifier que deux autres solutions indépendantes sont données par

$$y_2(x)=xe^{-ax} \qquad\qquad y_3(x)=x^2e^{-ax}\,.$$

La solution de

$$(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}+3a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+3a^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a^3)G(x,y)=\delta(x-y)$$

a donc la forme

$$G(x,y)=\begin{cases}(b_{0-}(y)+b_{1-}(y)x+b_{2-}(y)x^2)e^{-ax} & x>y\\ (c_{0-}(y)+c_{1-}(y)x+c_{2-}(y)x^2)e^{-ax} & x<y\end{cases}$$

avec conditions au bord

$$\begin{aligned}\lim_{x\to y_+} G^{(k)}(x,y) &= \lim_{x\to y_-} G^{(k)}(x,y) \qquad k=0,1\\ \lim_{x\to y_+} G^{(2)}(x,y) &= \lim_{x\to y_-} G^{(2)}(x,y)+1\,.\end{aligned}$$

Ces conditions donnent

$$b_{0-}=c_{0-}+\frac{1}{2}y^2e^{ay} \qquad b_{1-}=c_{1-}-ye^{ay} \qquad b_{2-}=c_{2-}+\frac{1}{2}e^{ay}$$

et

$$G(x,y)=(c_{0-}(y)+c_{1-}(y)x+c_{2-}(y)x^2)e^{-ax}+\frac{1}{2}(x-y)^2e^{-a(x-y)}\theta(x-y)\,.$$

6. **Soit l'équation de Bessel modifiée**

$$zy''(z) + y'(z) - \left(z + \frac{\nu^2}{z}\right) y(z) = 0\,.$$

avec $\nu \in \mathbb{R}$

a) **Quels sont les points singuliers et de quel type sont ils?**

b) **Calculer par série la solution de l'équation autour de** $z = 0$ **pour** $\nu \notin \mathbb{N}$**, en donnant explicitement les coefficients** c_n **de la solution.**

c) **Étudier en détail le cas où** $\nu = \frac{1}{2}$**: calculer les** c_n **et sommer la série.**

a) Si on reécrit l'équation comme

$$y''(z) + \frac{1}{z}y'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) y(z) = 0\,.$$

on voit que $z = 0$ est un point Fuchsien car les fonctions

$$a_1(z) = \frac{1}{z} \qquad a_0(z) = 1 + \frac{\nu^2}{z^2}$$

ont un pôle d'ordre 1 et 2 respectivement. Si on pose $z = 1/w$ l'équation devient

$$y'' + \frac{1}{w}y'(z) - \left(\frac{1}{w^4} + \frac{\nu^2}{w^2}\right) y(z) = 0\,,$$

et donc $w = 0$ ($z = \infty$) est une singularité essentielle.

b) On cherche une solution du type

$$y(x) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,.$$

L'équation devient

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(\alpha+n)^2 - \nu^2]c_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+2} = 0\,.$$

Le terme constant en z donne l'équation indiciale

$$\alpha^2 - \nu^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \pm\nu$$

et les autres termes donnent

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{n(n \pm 2\nu)} \qquad \Longrightarrow \qquad c_{2n} = \prod_{l=1}^{n} \frac{c_0}{2l(2l \pm 2\nu)}$$

Donc si $\nu \notin \mathbb{N}$ les deux solutions indépendantes sont données par

$$\begin{aligned} y_{\pm\nu} &= c_0 z^{\pm\nu}[1 + \frac{z^2}{4(1+\pm\nu)} + \frac{z^4}{2^5(1+\pm\nu)(2+\pm\nu)} \\ &\quad + \frac{z^6}{3 \cdot 2^7(1+\pm\nu)(2+\pm\nu)(3+\pm\nu)} + \ldots] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(\pm\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu+2n} \end{aligned}$$

avec

$$c_0 = \frac{1}{2^{\pm\nu}\Gamma(1 \pm \nu)}$$

c) Pour $\nu = \frac{1}{2}$ les coefficients c_{2n} deviennent

$$c_{2n} = \prod_{l=1}^{k} \frac{c_0}{2l(2l+1)} = \frac{1}{(2n+1)!}\,,$$

et la solution ci-dessus s'écrit

$$y_{\frac{1}{2}} = z^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{(2n+1)!} z^{2n} = c_0 \frac{\sinh z}{z^{1/2}}\,.$$

Pour $\nu = \frac{1}{2}$ on a

$$c_{2n} = \prod_{l=1}^{k} \frac{c_0}{2l(2l-1)} = \frac{1}{(2n)!}\,,$$

avec solution

$$y_{-\frac{1}{2}} = z^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{(2n)!} z^{2n} = c_0 \frac{\cosh z}{z^{1/2}}\,.$$