Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens
Devoir maison (non relevé)

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

Notations

La transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ d'une fonction $f(t)$ est définie par les relations suivantes :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \widehat{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \ , \qquad \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \ .$$

Relations de Kramers et Kronig

On considère un système physique avec une grandeur d'entrée $E(t)$ (par exemple la tension entre deux points d'un circuit électrique) et une grandeur de sortie $J(t)$ (par exemple le courant qui circule dans une branche du circuit).

1. Le système est soumis à un signal d'entrée non nul seulement pendant l'intervalle de temps $[t_0 - \mathrm{d}t/2, t_0 + \mathrm{d}t/2]$, où il vaut $E_0/\mathrm{d}t$. Montrer que dans la limite $\mathrm{d}t \to 0$ on a

$$E(t) = E_0\, \delta(t - t_0) \ .$$

2. On suppose que E_0 est petit, de sorte que les effets non-linéaires sont négligeables. La grandeur de sortie $J(t)$ s'écrit donc :

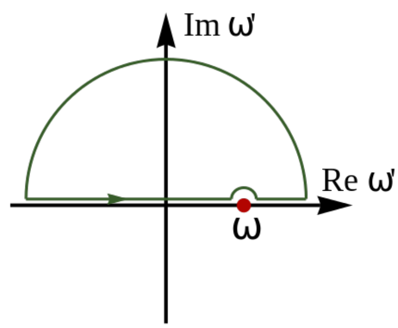
$$J(t) = E_0\, \chi(t; t_0) \ .$$

   Donner les deux arguments physiques qui permettent d'affirmer que :
   - $\chi(t;t_0) = \chi(t - t_0)$;
   - $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$.

3. Pour de faibles perturbations la réponse du système est additive : si une entrée $E_1(t)$ provoque une sortie $J_1(t)$, et une entrée $E_2(t)$ une sortie $J_2(t)$, alors $E_1(t)+E_2(t)$ provoquera $J_1(t) + J_2(t)$. En déduire que

$$J(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}s\, \chi(t - s) E(s) \ .$$

4. On considère la transformée de Fourier
$$\widehat{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, E(t) e^{i\omega t} \ ,$$
et l'on définit de même $\widehat{\chi}(\omega)$ et $\widehat{J}(\omega)$. Montrer que, puisque $E(t)$ est réel, $\widehat{E}(-\omega) = \overline{\widehat{E}(\omega)}$. Cette propriété de symétrie est aussi vérifiée par $\widehat{\chi}(\omega)$ et $\widehat{J}(\omega)$. Dans la suite on note $\widehat{\chi}(\omega) = \widehat{\chi}_R(\omega) + i\,\widehat{\chi}_I(\omega)$, avec $\widehat{\chi}_R$ et $\widehat{\chi}_I$ deux fonctions réelles.
5. Montrer que
$$\widehat{J}(\omega) = \widehat{\chi}(\omega)\widehat{E}(\omega) \ .$$
En déduire que si $E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$, on a
$$J(t) = J_0 \cos[\omega_0 t + \phi] \ ,$$
et donner les expressions de J_0 et ϕ en fonction de $\widehat{\chi}(\omega_0)$.
6. On va supposer que la réponse à très haute fréquence est faible, $|\widehat{\chi}(\omega)| \ll 1/|\omega|^2$ pour $|\omega| \to \infty$. Montrer, en utilisant le theorème des résidus, que $\chi(t < 0) = 0$ si la fonction $\widehat{\chi}(\omega)$ est analytique dans la moitié supérieure du plan complexe.
7. En utilisant le contour suivant :



ainsi que les hypothèses discutées précédemment, montrer que
$$\widehat{\chi}(\omega) = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \frac{\widehat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}$$
où P est la partie principale. En déduire que
$$\widehat{\chi}_I(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \frac{\widehat{\chi}_R(\omega')}{\omega' - \omega} \ ,$$
et exprimer de même $\widehat{\chi}_R$ en fonction de $\widehat{\chi}_I$.

On a donc démontré que la causalité ($\chi(t < 0) < 0$) implique que la partie imaginaire de la fonction de réponse est entièrement déterminée par la partie réelle (et vice-versa). Cette relation a de très nombreuses implications (par exemple en optique : la loi de Cauchy qui indique que l'indice optique du verre décroît avec la longueur d'onde est liée à l'absorption du verre dans l'UV).