Relativité et Électromagnétisme : TD soutien n°4
— L7 —

Quelques propriétés du tenseur électro-magnétique

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

04 avril 2012

1 Propriétés du tenseur $F_{\mu\nu}$

1. Expliciter le tenseur électro-magnétique $F_{\mu\nu}$ dans ses formes contravariante et covariante.
2. Exprimer ce tenseur en fonction d'un quadrivecteur potentiel A_μ. En déduire la condition d'invariance de jauge.
3. On note $\Lambda^\mu{}_\nu$ la matrice de Lorentz telle que $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$. En exprimant l'invariance du pseudo produit scalaire, montrer que : $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\sigma = \delta^\nu_\sigma$
4. Expliquer pourquoi $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ est un invariant relativiste ; le calculer.
5. On note $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ le tenseur totalement antisymétrique de rang 4. On admettra que ce tenseur est un invariant relativiste. En déduire que $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}$ est un autre invariant relativiste et le calculer en fonction des champs.
6. En partant de l'expression de $F_{\mu\nu}$ en fonction de A_μ, retrouver la forme covariante des équations de Maxwell homogènes : $\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$. En déduire les équations de Maxwell homogènes sous leur forme analytique.
7. En admettant la forme covariante des équations liant champs et sources $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$, retrouver le deuxième groupe des équations de Maxwell sous sa forme analytique.

2 Applications

1. Donner la formule de transformation de $F_{\mu\nu}$ dans un changement de référentiel galiléen.
2. En déduire les lois de transformation des champs dans un changement de référentiel galiléen. En donner une limite aux faibles vitesses.
3. Retrouver que $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ est un invariant.
4. On considère une onde plane dont le champ électrique est : $\mathbf{E} = E_0\cos(kx-\omega t)\mathbf{u}_y$. Donner la structure de cette onde dans un référentiel (R') en translation à la vitesse $\beta c\mathbf{u}_x$ par rapport à (R).
5. Montrer que la phase de l'onde est un invariant relativiste et en déduire que $k = (\omega/c, \mathbf{k})$ est un quadri-vecteur.