

# Relativité et Électromagnétisme : TD n°8

## — L7 —

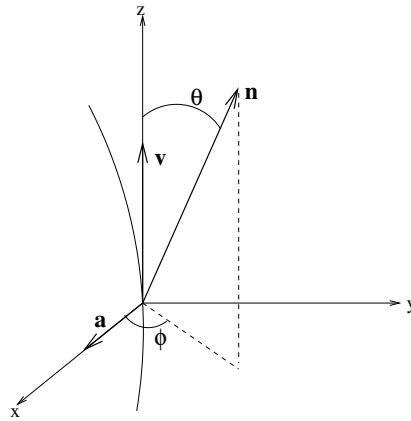
### Rayonnement synchrotron

Sébastien LEURENT, Marc LILLEY & Sylvain NASCIMBÈNE

29 mai 2012

## 1 Généralités

On s'intéresse dans cette partie au rayonnement émis par les électrons du synchrotron de l'université de Cornell. Cette machine est un accélérateur circulaire de rayon  $D = 200$  m dans lequel les électrons ( $m_e = 0.511$  MeV) sont portés à une énergie de 10 GeV.



On rappelle que la puissance perdue par unité d'angle solide par une particule de charge  $q$  en mouvement circulaire s'écrit, avec les notations de la figure ci-contre :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0c^3} \frac{a^2}{(1 - \beta \cos\theta)^3} \left( 1 - \frac{\sin^2\theta \cos^2\phi}{\gamma^2(1 - \beta \cos\theta)^2} \right)$$

On a vu dans le TD précédent que l'essentiel du rayonnement est émis dans un cône d'angle au sommet  $1/\gamma$  dans la direction définie par la vitesse instantanée de la particule.

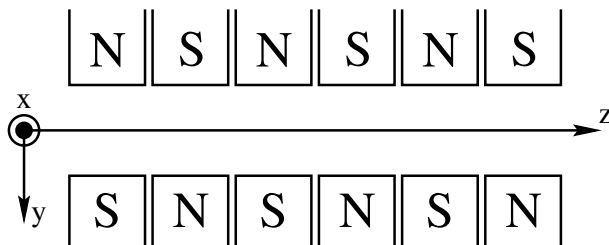
1. Un physicien place un détecteur en un point situé sur l'axe (Oz) à grande distance du synchrotron. Montrer qualitativement qu'il observe une série périodique d'impulsions lumineuses. Quelle est la période du signal ?
2. Montrer que la durée d'une impulsion s'écrit approximativement :

$$\delta t \simeq \left( \frac{D}{2c} \right) \frac{1}{\gamma^3}$$

3. *Application numérique* : quelles sont les longueurs d'onde extrêmes du spectre de rayonnement émis par les électrons ?

## 2 Onduleur

Dans les synchrotrons de génération récente, on a cherché à affiner le spectre émis par les électrons. Ces machines sont conçues comme des anneaux de stockage circulaires à partir desquels les électrons sont injectés dans des *onduleurs* qui permettent d'obtenir un rayonnement quasi-monochromatique dans le domaine des rayons X.



Le fonctionnement d'un onduleur est schématisé sur la figure ci-dessus. Un électron relativiste se propage selon l'axe Oz. Un champ magnétique oscillant obtenu par un arrangement périodique d'aimants permanents fait osciller l'électron dans le plan  $(xOz)$ , ce qui le fait rayonner.

### Étude du mouvement de l'électron

Le champ créé par l'onduleur s'écrit  $\mathbf{B} = B_0 \cos(k_0 z) \mathbf{u}_y$  avec  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  où  $\lambda_0$  est la périodicité spatiale du champ. À  $t = 0$ , l'électron relativiste pénètre dans l'onduleur avec une vitesse  $\beta_0 c$  ( $\beta_0 \simeq 1$ ).

1. Ecrire l'équation du mouvement dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ , en négligeant la réaction de rayonnement. On montrera que l'on peut résoudre cette équation en négligeant également l'oscillation suivant l'axe  $(Oz)$  et on exprimera le résultat en utilisant le paramètre de l'onduleur défini par :

$$\mathcal{K} = \frac{eB_0}{k_0 mc}$$

Donner la condition sur  $\mathcal{K}$  pour que les hypothèses soient valides.

### Étude du champ rayonné

On s'intéresse au champ rayonné par l'électron en un point  $M$  situé à grande distance  $R$  dans la direction  $\mathbf{n}$  paramétrée par les angles  $\theta$  et  $\phi$  des coordonnées sphériques usuelles. On se limite au rayonnement reçu à des instants voisins de  $T = R/c$ , instants pour lesquels le rayonnement a été produit par l'électron au voisinage de l'origine O.

2. Montrer que l'instant retardé  $t_0$  s'écrit, dans la limite où l'on peut négliger le retard dû au mouvement transverse :

$$t_0 = \frac{t - R/c}{1 - \beta \cos \theta}$$

3. En négligeant toujours la vitesse transversale de l'électron, déterminer l'expression explicite du champ électrique rayonné en  $M$ . On s'intéresse par la suite à la zone de rayonnement intense. Dédire de l'expression du champ électrique la pulsation  $\omega(\mathbf{n})$  du rayonnement dans la direction  $\mathbf{n}$ .
4. Estimer la largeur du lobe d'émission. En déduire la structure du champ électromagnétique dans la zone utile (étude de la polarisation).

5. *Applications numériques* pour des électrons de 5 GeV dans un onduleur de période 1 cm.
6. Quelle est la condition sur le paramètre  $\mathcal{K}$  pour avoir une source continue de rayonnement et non pas des impulsions ?

### Étude dans le référentiel propre de l'électron

On cherche à retrouver les résultats précédents en se plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $\beta_0 c \mathbf{u}_z$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

7. Que devient le champ de l'onduleur dans ce référentiel ? À quelle fréquence excite-t-il l'électron ?
8. Retrouver alors la fréquence du rayonnement dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

### Formulaire

On rappelle que le champ électromagnétique rayonné à grande distance en un événement  $(\mathbf{r}, t)$  par une particule de charge  $q$  dont la trajectoire est fixée s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c}$$

où toutes les quantités relatives à la particule sont considérées à l'instant retardé  $t_0(\mathbf{r}, t)$ .