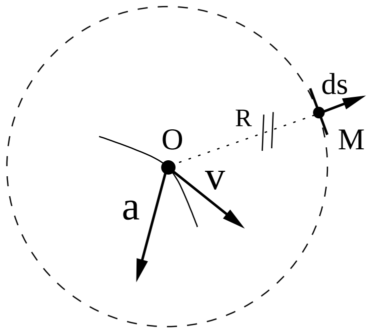
Relativité et Électromagnétisme : TD n°7
— L7 —

Rayonnement d'une particule chargée

Sébastien Leurent & Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

22 mai 2012

1 Préliminaires : puissance et impulsion rayonnées par une charge en mouvement



Une particule chargée, de vitesse $\mathbf{v}$ et d'accélération $\mathbf{a}$, passe par le centre O d'une sphère de rayon R à l'instant t_0. Un point M de la sphère est repéré par le vecteur unitaire $\mathbf{n} = \mathbf{OM}/\mathrm{R}$. On considère l'ensemble du rayonnement émis par la particule entre les instants t_0 et $t_0 + dt_0$.

(a) Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel ce rayonnement traversera l'élément de surface $ds\mathbf{n}$ autour de M.

(b) En déduire que la partie de l'énergie rayonnée entre t_0 et $t_0 + dt_0$ qui traversera ds s'écrit :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{M}, t_0 + \mathrm{R}/c) \cdot \mathbf{n}ds\ (1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})\ dt_0.$$

(c) Conclure que la puissance rayonnée par unité d'angle solide s'écrit :

$$\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{d\mathcal{E}}{dt_0\, d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \frac{\|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})\|^2}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^5}} \tag{1}$$

(d) De la même manière, montrer que l'impulsion rayonnée par unité de temps et par unité d'angle solide s'écrit :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt_0\, d\Omega} = \left(\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega}\right) \frac{\mathbf{n}}{c}. \tag{2}$$

(e) (calculs longs, à faire chez soi) On va intégrer l'expression (1) afin de déterminer la puissance rayonnée par la particule. Pour cela, montrer tout d'abord que l'on a :

$$\mathcal{P} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c} \left[\dot{\boldsymbol{\beta}}^2\, \mathrm{I} + 2(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \boldsymbol{\beta})\dot{\beta}_i\, \mathrm{J}_i - (1 - \beta^2)\dot{\beta}_i\dot{\beta}_j\, \mathrm{K}_{ij}\right] \tag{3}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \int \frac{d\Omega}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} = \frac{4\pi}{(1-\beta^2)^2} && (4)\\
\mathrm{J}_i &= \int \frac{n_i\, d\Omega}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^4} = \frac{1}{3}\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial\beta_i} = \frac{16\pi\beta_i}{3(1-\beta^2)^3} && (5)\\
\mathrm{K}_{ij} &= \int \frac{n_i n_j\, d\Omega}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^5} = \frac{1}{12}\frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial\beta_i\partial\beta_j} = \frac{4\pi}{3(1-\beta^2)^3}\left(\delta_{ij} + \frac{6\beta_i\beta_j}{1-\beta^2}\right) && (6)
\end{aligned}
$$

Déduire finalement l'expression de la puissance rayonnée par la particule :

$$
\boxed{\mathcal{P} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left(\frac{\mathbf{a}^2 - (\mathbf{a}\times\boldsymbol{\beta})^2}{(1-\beta^2)^3}\right)} \qquad (7)
$$

On peut montrer, en utilisant une méthode analogue, que l'impulsion cédée au champ par la charge s'écrit quant à elle :

$$
\frac{d\mathbf{P}}{dt_0} = \left(\frac{\mathcal{P}}{c}\right)\boldsymbol{\beta}. \qquad (8)
$$

(f) Considérons le mouvement d'une particule de charge q, soumise à l'action d'un champ magnétique. Le champ accélère la charge, celle-ci rayonne et perd de l'énergie. Or, d'après ce que vous savez de l'électrodynamique, la variation d'énergie de la particule s'écrit :

$$
\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}
$$

Elle est donc nulle dans la situation considérée. Où est le problème ?

(g) On considère une particule de charge q animée d'une faible vitesse ($v \ll c$). Montrer alors que la puissance rayonnée par unité d'angle solide s'écrit :

$$
\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} a^2 \sin^2\theta
$$

où θ est l'angle entre l'accélération $\mathbf{a}$ et la direction $\mathbf{n}$ considérée. Commenter cette relation.

(h) Montrer que l'expression de la puissance rayonnée par une particule non relativiste est donnée par l'expression suivante (formule de Larmor) :

$$
\boxed{\mathcal{P}_{\text{Larmor}} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\left\|\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right\|^2} \qquad (9)
$$

2 Rayonnement des électrons du LEP

Le LEP est un accélérateur circulaire de 27 km de circonférence dans lequel des électrons ($m = 0.511$ MeV) sont portés à une énergie ultra-relativiste de 50 GeV.

Dans cet accélérateur, les électrons émettent un rayonnement électromagnétique au cours de deux phases bien précises de leur trajectoire qui sont :

- la phase d'accélération. En effet, à chaque tour, les électrons sont accélérés par un champ électrique.
- leur mouvement le long du tunnel du LEP, dans lequel un champ magnétique les dévie en permanence.

2.1 Rayonnement d'une charge accélérée linéairement

On considère dans un premier temps une particule de charge q en mouvement d'accélération linéaire. Les notations sont précisées sur la figure 1.

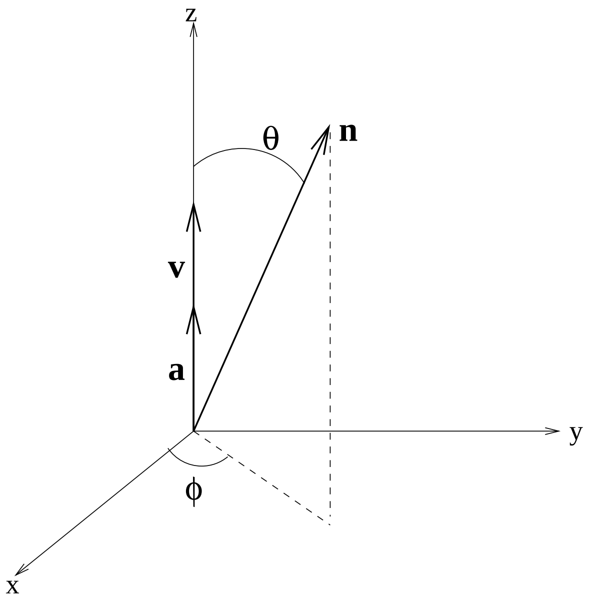


FIGURE 1: Mouvement linéaire

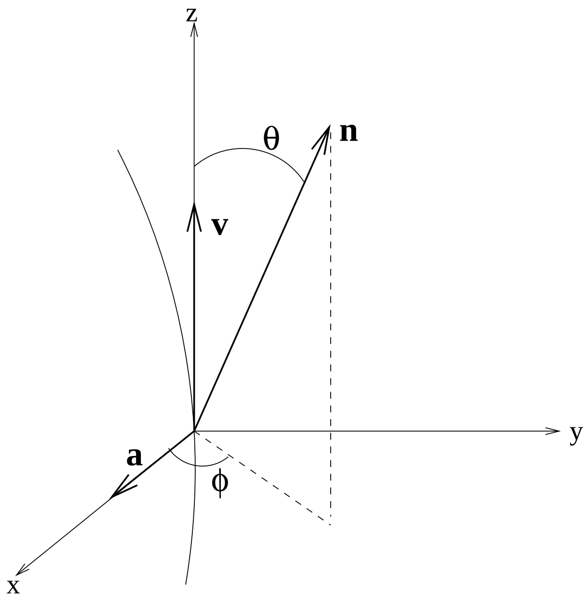


FIGURE 2: Mouvement circulaire

(a) Montrer que la puissance perdue par unité d'angle solide s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{a^2\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

(b) Etudier le diagramme de rayonnement en montrant en particulier que l'énergie est essentiellement rayonnée dans une direction définie par $\theta_{\max} \simeq 1/2\gamma$ pour des vitesses proches de celle de la lumière.
(c) En utilisant (7), déterminer la puissance perdue par la particule. On mettra le résultat sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{lin}} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2} \tag{10}$$

Commenter ce résultat et comparer avec la formule de Larmor.

2.2 Rayonnement d'une charge en mouvement circulaire

On envisage désormais la situation schématisée sur la figure (2). La particule de charge q est maintenant en mouvement circulaire uniforme. Le rayonnement caractéristique ainsi émis s'appelle le rayonnement synchrotron.
(a) Montrer que la puissance perdue par unité d'angle solide s'écrit :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{a^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1-\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right)$$

(b) En déduire que l'énergie est principalement rayonnée dans la direction de la vitesse avec une dispersion angulaire $\delta\theta \simeq 1/\gamma$.

(c) Montrer alors que la puissance perdue par la particule s'écrit (on utilisera toujours (7)) :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{circ}} = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3}\,\gamma^2 \left\| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\|^2} \tag{11}$$

Comparer avec les résultats (9) et (10) établis précédemment.

2.3 Ordres de grandeur pour les électrons du LEP

Etablissons désormais quelques ordres de grandeur relatifs au mouvement des électrons du LEP.

phase d'accélération

Chaque tour, les électrons pénètrent dans une zone de longueur L = 100 m où ils sont soumis à un champ électrique uniforme E = 5 MV/m.
(a) En négligeant dans un premier temps le rayonnement, déterminer le gain en énergie des électrons $\Delta\mathcal{E}$ après passage dans la cavité accélératrice.
(b) Montrer alors que l'énergie rayonnée s'écrit :

$$\mathcal{E}_{\text{ray}} = \frac{2}{3}\left(\frac{q\mathrm{E}r_{\text{cl}}}{mc^2}\right)\Delta\mathcal{E}$$

où r_{cl} est le rayon classique de l'électron défini par :

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\text{cl}}} = mc^2$$

Interpréter cette relation.
(c) Conclure alors que le rayonnement est totalement négligeable dans ce cas.

rayonnement synchrotron

(a) Déterminer l'ordre de grandeur du champ magnétique nécéssaire pour courber la trajectoire des électrons.
(b) En déduire l'énergie perdue par un électron à chaque tour. Conclusion ?

Formulaire

On rappelle que le champ électromagnétique rayonné à grande distance en un événement $(\mathbf{r}, t)$ par une particule de charge q dont la trajectoire est fixée s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\mathbf{n}\times\left((\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right)}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3\,\mathrm{R}}\right]_{\text{ret}} \tag{12}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{n}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c} \tag{13}$$

où toutes les quantités relatives à la particule sont considérées à l'instant retardé $t_0(\mathbf{r}, t)$.

Intégrales utiles :

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta = \frac{4}{3} \tag{14}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{(1 - a\cos\theta)^5} \, d\theta = \frac{4}{3}\frac{1}{(1-a^2)^3} \tag{15}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^7(x-a)}} = \frac{16}{15a^3} \tag{16}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\pi}{4a^3} \tag{17}$$