Relativité et Électromagnétisme : TD n°6
— L7 —

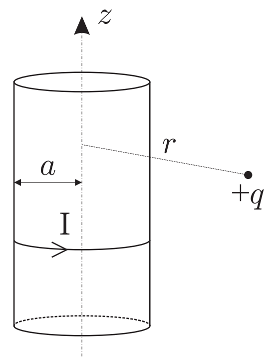
Échange d'impulsion entre particules et champ électromagnétique

Sébastien LEURENT, Marc LILLEY & Sylvain NASCIMBÈNE

15 mai 2012

1 Échange d'impulsion entre particules et champ électromagnétique

Considérons l'expérience schématisée sur la figure ci-dessous. Une particule de masse m, de charge q initialement au repos, est placée à une distance b d'un solenoïde infiniment long, de rayon a, comportant n spires par mètre et parcouru par un courant constant I.
On rappelle les expressions des champs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ pour une telle distribution de courant à l'intérieur et à l'extérieur du solenoïde :



$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ \mu_0 n I \, \boldsymbol{e}_z & \text{si } r < a \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{Ba^2}{2r} \, \boldsymbol{e}_\theta & \text{si } r > a \\ \frac{Br}{2} \, \boldsymbol{e}_\theta & \text{si } r < a \end{cases}$$

On arrête brusquement le courant dans le solénoïde à l'instant $t = 0$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi la charge va se mettre en mouvement à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer la quantité de mouvement acquise par la charge à l'instant $t = 0^+$. On supposera que le temps de coupure du courant infiniment court.
3. Calculer l'impulsion du champ électromagnétique dans la situation initiale avant la coupure du courant. On utilisera successivement les relations suivantes :

$$\mathbf{grad} f \times \mathbf{a} = \mathbf{rot}(f\mathbf{a}) - f\mathbf{rot}(\mathbf{a})$$

$$\int_\nu d^3\mathbf{r} \; \mathbf{rot} \; \mathbf{a} = \int_S d^2\mathbf{s} \times \mathbf{a}$$

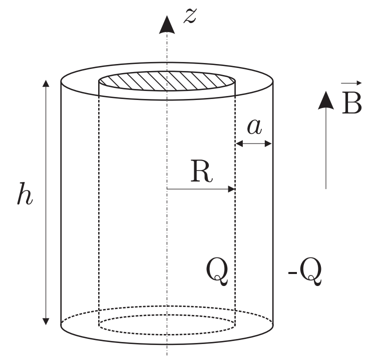
4. Commenter le résultat de la question précédente en relation avec la question 2.

2 Échange de moment cinétique entre particules et champ électromagnétique

L'expérience étudiée dans ce problème, destinée à mettre en lumière la conservation du moment cinétique du système global champ + charges, est résumée sur la figure ci-dessous. Un condensateur cylindrique C, de hauteur h, de rayon interne R et d'épaisseur $a \ll R$ est chargé sous une tension U avec des charges $+Q$ et $-Q$. Le tout est plongé dans un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B\boldsymbol{e}_z$. Le condensateur se décharge alors à travers son diélectrique à partir de $t = 0$.

On négligera les effets de bord et on rappelle que dans la limite où $a \ll R$, on peut considérer le condensateur comme plan. La capacité du condensateur et le champ électrique entre les armatures s'écrivent alors :

$$C = \epsilon_0 \frac{2\pi Rh}{a} \quad \text{et} \quad \mathbf{E} = \frac{U}{a}\,\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$



1. Déterminer la valeur du moment cinétique $\mathbf{M}^i_{\text{champ}}$ du champ électromagnétique avant la décharge, en fonction de Q, a, R et B.
2. Que se passe-t-il qualitativement pendant la décharge ?
3. Écrire l'équation donnant l'évolution du moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}$ du cylindre pendant le processus. Montrer alors que, si le temps de décharge est assez court pour que le cylindre ne bouge pas trop pendant sa mise en rotation, on peut écrire le moment cinétique final sous la forme :
$$\boldsymbol{\sigma}^f = \int_C \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{r} \times \left[\int_0^\infty \boldsymbol{\jmath}(t)dt \times \boldsymbol{B}\right]$$
où $\boldsymbol{\jmath}(t)$ est la densité volumique de courant.
4. Commenter le résultat de la question précédente en relation avec la question 1.