Relativité et Électromagnétisme : TD n°4
— L7 —

Collisions relativistes

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

13 mars 2012

1 Collisions élastiques

A l'issue d'une collision élastique entre une particule de masse m et d'énergie cinétique T avec une autre particule de masse m au repos, les deux particules ont des énergies inégales et leurs vecteurs vitesse sont inégalement inclinés par rapport à la direction de la particule incidente (ils forment des angles qu'on notera θ_1 et θ_2 et on pose $\alpha = \theta_1 + \theta_2$). La mécanique newtonienne prédit que l'angle α compris entre ces deux vecteurs vitesse sera toujours égal à $\pi/2$. Il n'en va pas de même en mécanique relativiste, celle-ci prédit un angle inférieur à $\pi/2$.

1. Montrer, en utilisant la conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique, que la mécanique newtonienne prédit que $\alpha = \pi/2$.
2. Utiliser maintenant la conservation de l'énergie-impulsion en relativité restreinte pour donner l'expression de $\cos\alpha$ en fonction des énergies des particules. Montrer que $\alpha < \pi/2$. Montrer que dans le cas $\theta_1 = \theta_2$, on a :
$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T} + 4mc^2}$$

2 Collisions inélastiques - Énergie de seuil

On notera $\widetilde{\mathrm{Q}}$ un quadrivecteur et $\overrightarrow{\mathrm{Q}}$ sa composante spatiale.

2.1 Préliminaire : notion de centre de masse en relativité

Considérons un ensemble de N particules dont l'une au moins est de masse non nulle. On note $\widetilde{p_i}$ la 4−impulsion de la particule i définie dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

1. Montrer que la 4-impulsion totale du système $\widetilde{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \widetilde{p_i}$ est un quadrivecteur de genre temps.
2. En déduire qu'il existe un Référentiel Galiléen dans lequel $\overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{0}$. Montrer que le référentiel du centre de masse noté $\mathcal{R}_{\mathrm{CM}}$ est défini par rapport à $\mathcal{R}$ par sa vitesse :
$$\overrightarrow{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \overrightarrow{p}(i)c}{\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathcal{E}(i)}$$
où $\mathcal{E}(i)$ désigne l'énergie de la particule.
3. Vérifier que l'on retrouve le Référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ à la limite non relativiste.

2.2 Seuil d'une réaction nucléaire

On cherche à créer des noyaux d'Aluminium en bombardant une cible de Magnésium à l'aide de particules α (noyaux d'Hélium), selon la réaction suivante :

$$^{24}_{12}\mathrm{Mg} + ^4_2\mathrm{He} \quad \longrightarrow \quad ^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^1_1\mathrm{H}$$

1. Quelle doit être l'énergie minimale $\mathcal{E}^*$ des réactifs dans le référentiel du centre de masse pour que la réaction ait lieu ?
2. En déduire, en repassant dans le référentiel $\mathcal{R}$, que l'énergie cinétique minimale des particules α s'écrit :
$$\mathrm{T}_{\mathrm{seuil}} = \frac{(m_p c^2 + m_{\mathrm{Al}} c^2)^2 - (m_\alpha c^2 + m_{\mathrm{Mg}} c^2)^2}{2 m_{\mathrm{Mg}} c^2}$$
3. *Application numérique.* Quelle doit être la vitesse des particules α ?

2.3 Matérialisation de photons par création de paires $e^- e^+$

A haute énergie ($h\nu > 100$Mev), le processus prépondérant dans l'absorption des photons par la matière est la création de paires électron-positron (On rappelle que le positron noté e^+ est l'antiparticule de l'électron e^-, de masse m_e et de charge $+e$).

1. Montrer qu'un photon ne peut pas se matérialiser dans le vide d'après la réaction :
$$\gamma \quad \longrightarrow \quad e^+ + e^-$$
2. La matérialisation nécessite donc la présence d'un catalyseur A qui intervient dans le bilan sous la forme :
$$\gamma + \mathrm{A} \quad \longrightarrow \quad e^+ + e^- + \mathrm{A}$$
Quel est son rôle ?

   Déterminer l'énergie de seuil dans les deux cas suivants :
   - A est un électron au repos.
   - A est un noyau atomique au repos.

Données numériques

Elément	masse
$^{24}_{12}\mathrm{Mg}$	$23,985042\,u$
$^{27}_{13}\mathrm{Al}$	$26,981539\,u$
$^1_1\mathrm{H}$	$1,007268\,u$
$^4_2\mathrm{He}$	$4,002603\,u$
e^-,e^+	$0,5$ Mev

avec $1\,u = 931.48$ Mev

2.4 Réaction de désintégration

Un méson π^0 de masse m se déplace selon l'axe des x du laboratoire à la vitesse βc. Il se désintègre en deux photons. Dans le système dans lequel le méson est au repos, ces photons sont émis selon une direction faisant un angle θ' avec l'axe x'.

1. Déterminer l'énergie des photons dans le référentiel du méson.
2. En déduire les énergies et les directions de propagation des 2 photons dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle θ'.

3 Mouvement d'une particule chargée dans des champs uniformes constants

3.1 Champ E

On considère le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ électrique constant $\mathbf{E}$ porté par l'axe (Ox). A l'instant initial, la particule possède une impulsion $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{u}_y$.

1. Rappeler les résultats de la mécanique classique concernant le mouvement de la particule.

2. On se place désormais dans le cadre de la relativité restreinte. En intégrant l'équation différentielle pour l'impulsion, montrer que l'énergie de la particule peut s'écrire sous la forme suivante :
$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qc\mathrm{E}t)^2}$$
On donnera l'expression de $\mathcal{E}_0$.

3. Déduisez-en une relation entre $\mathbf{v}$, $\mathbf{p}$ et $\mathcal{E}$ que l'on intégrera pour trouver les équations du mouvement.

4. Trouvez l'équation de la trajectoire de la particule et montrez que dans le cas $v \ll c$, on retrouve la trajectoire classique.

3.2 Champ E et B

1. Déterminer les caractéristiques de la trajectoire d'une particule relativiste dans un champ $\mathcal{B}$ uniforme dans le cas où sa vitesse initiale est dans un plan perpendiculaire au champ.

2. On considère maintenant la situation où une particule immobile à l'instant initial est soumise à un champ électrique perpendiculaire à un champ magnétique. Les champs vérifient l'inégalité suivante : $c^2\mathrm{B}^2 - \mathrm{E}^2 > 0$. Montrer qu'il existe un référentiel galiléen dans lequel le champ électrique est nul. En déduire la trajectoire du mouvement dans le référentiel initial.