Relativité et Électromagnétisme : Devoir maison
— L7 —
À rendre le 15 mai 2012
Texte basé sur les examens d'années passées

Sébastien Leurent, Marc Lilley & Sylvain Nascimbène

10 avril 2012

1 Diagramme de Loedel

Cet exercice porte sur la représentation graphique d'un espace-temps à 2 dimensions (une dimension d'espace et une dimension temporelle).

On considère les systèmes d'axes obliques $x\mathrm{O}y$ et $x'\mathrm{O}y'$ définis par la figure 1 ci-dessous :

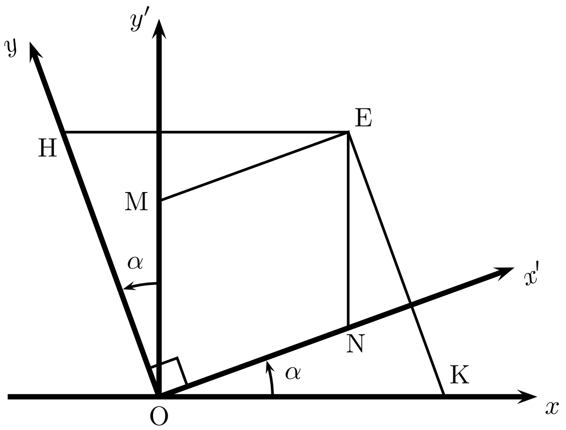
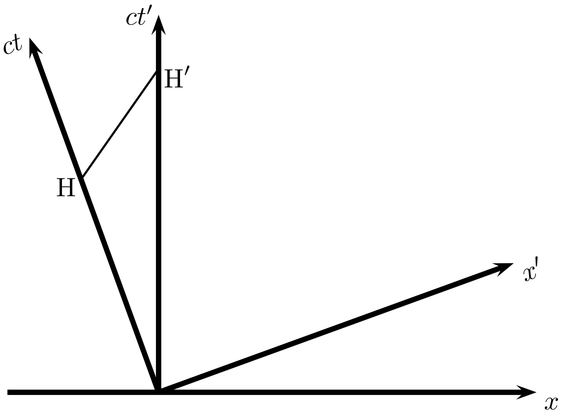


Figure 1: Diagramme de Loedel

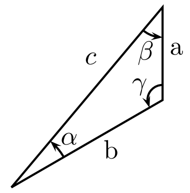
Soit E un point du plan. On le repère par ses coordonnées

$$\begin{cases} x = \mathrm{OK} & y = \mathrm{OH} \\ x' = \mathrm{ON} & y' = \mathrm{OM} \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathrm{OH}^2 - \mathrm{OK}^2 = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{ON}^2$.
2. On pose $\mathrm{OH} = ct$, $\mathrm{OK} = x$, $\mathrm{OM} = ct'$, et $\mathrm{ON} = x'$.
   Montrer que si E est un événement d'espace-temps, (ct, x) et (ct', x') représentent ses coordonnées dans deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.
3. Soit v la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.
   Exprimez l'angle α en fonction de $\beta = v/c$.
4. Dessinez le cône de lumière issu de O.
   Exprimez l'angle que le rayon lumineux issu de O fait avec l'axe Ox.
5. On se propose de retrouver la formule de l'effet Doppler par une construction purement géométrique (figure 2).



(a) Diagramme de Loedel



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

(b) identité trigonométrique

FIGURE 2: Diagramme de Loedel et effet Doppler

On considère l'émission d'un signal lumineux issu de H à l'instant T_0, calculer l'instant H′ de réception du signal dans le référentiel $\mathcal{R}$.
On pourra utiliser la relation trigonométrique $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, valable dans le triangle de la figure 2(b).

2 Diffusion Compton inverse

On étudie la diffusion élastique électron-photon.

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma$$

Soit ω (resp. ω') la pulsation du photon incident (diffusé) et $v = \beta c$ la vitesse de l'électron incident.

1. Montrer que les quadri-vecteurs énergie-impulsion satisfont :

$$p_e(p_\gamma - p'_\gamma) = p_\gamma p'_\gamma$$

On considère le cas d'une diffusion frontale. L'électron et le photon incidents ont des impulsions de signe opposés. On suppose en outre que le photon final est rétrodiffusé, c'est-à-dire réémis dans la direction incidente avec une impulsion de signe opposé.

2. Écrire les quadri-vecteurs énergie-impulsion p_e, p_γ, p'_γ
3. En déduire la pulsation ω' en fonction de ω et β.
4. Que devient cette formule pour des électrons ultra-relativistes ?
5. Application : étudier la diffusion d'électrons de haute énergie par le fond cosmologique constitué de photons de longueur d'onde $\lambda = 1,9$ mm. Comment ce phénomène peut-il être observé expérimentalement.

On donne : $E_e = 30$ GeV ; $m_e c^2 = 0,5$ MeV

Problème 2 : Nombre de photons et changement de référentiel

On considère une boîte remplie d'une radiation monochromatique de pulsation ω. Si U désigne l'énergie électromagnétique totale dans la boîte, le nombre de photons N dans la boîte est donné par

$$N = \frac{U}{\hbar\omega} \qquad (1)$$

L'objet de ce problème est de monter que le nombre de photons N est un invariant de Lorentz, alors que ni U ni ω ne le sont.

Soient deux référentiels d'inertie $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On note $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ les vecteurs unitaires portés par les axes Ox, Oy, Oz respectivement. Le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace par rapport à $\mathcal{R}$ avec la vitesse $\vec{v} = v\vec{e_x}$. Un événement a pour coordonnées (ct, x, y, z) dans $\mathcal{R}$ et (ct', x', y', z') dans $\mathcal{R}'$.

Soit l'onde plane monochromatique de pulsation $\omega = ck$ dont les champs électrique et magnétique sont donnés dans le référentiel $\mathcal{R}$ par

$$\begin{aligned} \vec{E}(t, x, y, z) &= E_0 \cos(\omega t - kx)\, \vec{e_y} \\ \vec{B}(t, x, y, z) &= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx)\, \vec{e_z} \end{aligned} \qquad (2)$$

On posera $\beta = \frac{v}{c}$

1. Déterminer les champs électrique $\vec{E'}(t', x', y', z')$ et magnétique $\vec{B'}(t', x', y', z')$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Montrer que la pulsation ω' de l'onde dans le référentiel $\mathcal{R}'$ a pour expression

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

2. On considère dans le référentiel $\mathcal{R}$ la boîte (virtuelle) B suivante. À l'instant t la boîte est une boule de rayon $\rho \gg 1/k$ centrée à l'origine. La boîte se déplace sans se déformer à la vitesse $c\vec{e_x}$. Le bord de la boîte à l'instant t est la sphère d'équation

$$(x - ct)^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

La boîte n'a pas d'existence réelle, elle est seulement imaginée et ne modifie pas l'onde (2).

a) Pourquoi, dans le référentiel $\mathcal{R}$, l'énergie électromagnétique totale U contenue dans la boîte est-elle constante au cours du temps ?

b) Montrer qu'une expression approchée de U dans la limite $k\rho \gg 1$ est donnée par

$$\langle U \rangle = \frac{2\pi\epsilon_0}{3} E_0^2 \rho^3$$

c) Décrire l'apparence de la boîte B dans le référentiel $\mathcal{R}'$ à l'instant t'. Déterminer son volume dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en fonction de ρ et β. On pourra chercher l'équation cartésienne de la boîte dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et utiliser le résultat donné en appendice.

d) Calculer dans le référentiel $\mathcal{R}'$ une valeur approchée de l'énergie électromagnétique totale U' contenue dans la boîte puis vérifier que le nombre de photon tel que défini par (1) est bien invariant par changement de référentiel.

Appendice :

On rappelle que le volume de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ est donné par $V = \frac{4\pi}{3}\, abc$