Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : tutorat n°9

Variables aléatoires continues

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1. En utilisant les propriétés de dérivation de la transformée de Fourier, trouver une équation différentielle vérifiée par la fonction charactéristique $G_X(t)$ d'une Gaussienne centrée, qu'on note $\mathcal{G}_\sigma(x)$. Intégrer cette équation différentielle et en déduire $G_X(t)$.
2. Soient X et Y deux v.a. normales centrées réduites et indépendantes. On pose $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\tan\theta = Y/X$. X et Y peuvent être interprétées comme les coordonnées cartésiennes d'un point aléatoire et R et θ comme ses coordonnées polaires. Montrer que R et θ sont deux v.a. indépendantes, dont on déterminera les distributions.
3. On considère une variable aléatoire X de densité de probabilité $p_X(x) = H(x)e^{-x}$ ($H(x)$ est la fonction de Heaviside). Calculer les moments $\langle X^n \rangle$, la fonction charactéristique $G_X(t)$, les cumulants $M_n^c(X)$, et la médiane m de X qui est definie par la relation $\mathbb{P}(X > m) = 1/2$. Montrer que $m < \langle X \rangle$, et discuter le résultat.
4. On considère une variable aléatoire X de densité de probabilité $p_X(x) \propto 1/(1 + x^{2k})$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer les moments $\langle X^n \rangle$.
   Facultatif : Calculer la fonction charactéristique $G_X(t)$ (au moins pour $k = 1$ et $k = 2$) et discuter son comportement a $t = 0$.
5. Soient deux variables aléatoires continues X et Y prenant chacunes leurs valeurs x et y dans l'intervalle $[-1, 1]$. La densité de probabilité conjointe de ces deux variables est $p(x, y)$:
$$p(x,\, y) = \begin{cases} C[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si } (|x| \le 1 \text{ et } |y| \le 1) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \tag{1}$$
   (a) Normaliser la distribution $p(x, y)$.
   (b) Trouver les distributions marginales $p_X(x)$ et $p_Y(y)$.
   (c) On désigne par S la somme $X + Y$, et par $F_S(s)$ la fonction de répartition de S.
      i. Donner aussi précisément que possible l'allure du graphe de $F_S(s)$ en fonction de s.
      ii. Donner l'expression intégrale de $F_S(s)$ en précisant bien le domaine d'intégration ; illustrer par un dessin.
      iii. En effectuant des changements de variables adéquats dans l'expression précédente, montrer que $F_S(s)$ peut s'écrire, pour $s \le 0$:
$$F_S(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{s-x} dy\, [p(x,\, y) + p(y,\, x)]. \tag{2}$$
      iv. En déduire l'expression de $F_S(s)$ pour $s \le 0$.
      v. Sans calcul supplémentaire, donner l'expression de $F_S(s)$ pour $s \ge 0$.
      vi. Quelle est la distribution $p_S(s)$ de la v.a. S ? En tracer le graphe.
   (d) Trouver les fonctions charactéristiques $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ des v.a. X et Y.
   (e) Quelle est la fonction charactéristique $G_S(t)$?