Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : tutorat n°7

Equations differentielles et fonction de Green

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 Equations differentielles et operateurs differentiels

1. Trouver deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$ telles que $[a(x)D, b(x)D] = D$, où $D = \frac{d}{dx}$ et $[A, B] = AB - BA$ est le commutateur.
2. Trouver la solution générale de l'équation $\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{2x}{1+x^2} \frac{df}{dx} = 1$.
3. Trouver la solution générale de l'équation $D_1 D_2 f(x) = 0$, où $D_1 = \frac{d}{dx} - \tanh x$ et $D_2 = \frac{d}{dx} - 1$.

2 Fonction de Green de l'oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 soumis à une force $f(t)$, nulle pour $t < 0$. Une façon de résoudre l'équation du mouvement $\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\right] x(t) = f(t)$ est de chercher tout d'abord les solutions pour $f(t) = \delta(t)$ et d'utiliser la linéarité de l'équation. Une telle solution est appelée *fonction de Green* ; on la note $G(t)$.

1. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{G}(\omega)$ de la fonction de Green. Quels sont ses pôles ?
2. Pour calculer $G(t)$, on doit choisir la position des pôles par rapport à l'axe réel. Montrer que la condition de causalité $G(t) = 0$ pour $t < 0$ revient à choisir les pôles juste au dessus de l'axe réel.
3. Calculer alors explicitement $G(t)$.
4. Pour un second membre $f(t)$ quelconque, montrer que
$$x^0(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tau G(t - \tau) f(\tau)$$
est une solution de l'équation différentielle.
5. Calculer les conditions initiales $x^0(t = 0)$ et $\dot{x}^0(t = 0)$.
6. Montrer qu'on obtient la solution satisfaisant les conditions initiales $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$ en remplaçant $f(t) \to f(t) - x_0\delta'(t) + v_0\delta(t)$. Calculer alors explicitement cette solution.
7. Vérifier que les méthodes habituelles de résolution par variation de la constante conduisent au même résultat.