Licence de Physique, FIP

Mathématiques pour physiciens : Tutorat n°5

Préparation au partiel

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

1 - On pose, pour $x \in]0,1]$ et $n \geq 1$,

$$f_n(x) = n\, x^n \, \ln(x) \ . \tag{1}$$

Démontrer que f_n converge simplement sur $]0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. Étudier les variations de f_n et en déduire que la convergence de f_n vers f n'est pas uniforme sur $]0,1]$, mais qu'elle uniforme sur $]0,a]$ pour tout $a < 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x\, f_n(x)$.

2 - Determiner les singularités des fonctions suivantes, y compris à l'infini, et si nécessaire proposer un choix de coupures :

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \ , \qquad f(z) = \log \frac{z-1}{z+1} \ .$$

3 - Ecrire les coefficients f_n de la série de Laurent :

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2} \sin\left(\frac{\pi z}{2z-4}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n (z-2)^n \ .$$

4 - Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\theta \ \frac{1+\cos^2\theta}{1+\sin^2\theta} \ ;$$

$$I_2 = \int_\gamma dz \ (3z - \bar{z}^2)^2 \ ; \quad \gamma \text{ est le circle } |z| = 1 \text{ orienté en sens antihoraire.}$$

$$I_3 = \int_\gamma dz \ \frac{\sin \pi z}{(z^2-4)(z-2)^2} \ ; \quad \gamma \text{ est le circle } |z-1-i| = 2 \text{ orienté en sens antihoraire.}$$

$$I_4(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{ikx} \ \frac{x}{(x^2+1)^2} \ ; \qquad k \in \mathbb{R}$$