Licence de Physique, FIP 2018-19

Mathématiques pour physiciens : Tutorat n°10

Formule sommatoire de Poisson

Guilhem Semerjian & Francesco Zamponi

Rappels et notations

Une fonction T-périodique, i.e. telle que $f(x) = f(x+T)$, suffisamment régulière, peut être répresentée par sa série de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_n \, e^{-2\pi i n x/T} \ , \qquad \widehat{f}_n = \int_{-T/2}^{T/2} dx \, f(x) \, e^{2\pi i n x/T} \ . \tag{1}$$

La transformée de Fourier $\widehat{f}(k)$ d'une fonction $f(x)$ est définie par les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \widehat{f}(k) \, e^{-ikx} \ , \qquad \widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \, e^{ikx} \ , \tag{2}$$

ces conventions correspondant formellement à la limite $T \to \infty$ de la série de Fourier avec $k = 2\pi n/T$.

La dérivée d'une distribution est définie par $\langle S', \phi \rangle = -\langle S, \phi' \rangle$.

La translatée de a d'une fonction f est définie par $\tau_a f(x) = f(x-a)$, celle d'une distribution S par $\langle \tau_a S, \phi \rangle = \langle S, \tau_{-a} \phi \rangle$.

La transformée de Fourier $\widehat{S}$ d'une distribution S est définie par $\langle \widehat{S}, \phi \rangle = \langle S, \widehat{\phi} \rangle$.

La distribution de Dirac δ est définie par $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, le peigne de Dirac de période T par $\text{Ш}_T = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_{nT} \delta$.

Formule sommatoire de Poisson

1. En traitant le peigne de Dirac $\text{Ш}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$ comme une fonction T-périodique (on peut par exemple imaginer chaque pic de Dirac comme une Gaussienne très piquée), calculer les coefficients de sa décomposition en série de Fourier, et en déduire que $\text{Ш}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n x/T}$.
2. En utilisant le résultat précédent, montrer que

$$\widehat{\text{Ш}_T}(k) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{2\pi n}{T}\right) \ , \tag{3}$$

autrement dit que

$$\widehat{Ш_T} = \frac{2\pi}{T} Ш_{\frac{2\pi}{T}} \ . \tag{4}$$

Le peigne de Dirac est donc sa propre transformée de Fourier (à des facteurs d'échelle près).

3. Déduire de ce résultat la formule sommatoire de Poisson entre une fonction f et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \ , \tag{5}$$

valide tant que les deux membres de l'équation existent.

4. Cette formule est utile dans le contexte de l'analyse numérique : on considère la somme de Riemann d'une fonction $f(x)$ à décroissance rapide, avec un pas d'intégration Δx,

$$\Sigma(\Delta x) = \Delta x \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x) \ . \tag{6}$$

En utilisant la formule sommatoire de Poisson, donner une estimation de l'erreur faite quand on remplace l'intégrale par cette somme discrète,

$$E(\Delta x) = \Sigma(\Delta x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) \ , \tag{7}$$

en terme de la transformée de Fourier de f.

Ecrire explicitement $E(\Delta x)$ pour $f(x) = e^{-x^2}$, et étudier son comportement quand $\Delta x \to 0$.

5. Cette formule est aussi utile pour le calcul analytique de sommes de séries. Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, pour $a > 0$, et calculez sa transformée de Fourier. Déduire de la formule sommatoire de Poisson la valeur de

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \ , \tag{8}$$

puis par un passage à la limite calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.